Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls–Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von

Ira Verena Jung
aus Ludwigshafen

1999

Methoden zur Bildverarbeitung und Ereignisrekonstruktion des HEGRA-Teleskopsystems

Die Diplomarbeit wurde von Ira Verena Jung ausgeführt am

Max-Planck-Institut für Kernphysik
Heidelberg

unter der Betreuung von
Herrn Prof. W. Hofmann

Zur Untersuchung von kosmischer γ-Strahlung oberhalb von $1\,TeV$ sind stereoskopische Systeme aus abbildenden atmosphärischen Cherenkov Teleskopen besonders geeignet. Diese Arbeit befaßt sich mit einem Bildanalyseverfahren zur Rekonstruktion der Parameter von Luftschauern, das auf dem HEGRA-Teleskop-System basiert und von M. Ullrich (Doktorarbeit 1996) entwickelt wurde. Bei diesem Verfahren wird ein theoretisches Cherenkov Lichtbild mit dem gemessenen verglichen und seine Schauerparameter so variiert, daß beide Bilder optimal übereinstimmen. Das theoretische Profil wurde aus Monte Carlo Daten erstellt. Der Vergleich erfolgt durch die Minimierung einer χ^2-Funktion. Der Verlauf dieser Funktion wurde in Abhängigkeit von unterschiedlichen Wichtungen untersucht und optimiert. Man testete die Ergebnisse anhand von Monte Carlo Daten und realen Mkn 501 Meßdaten des HEGRA-Cherenkov-Teleskop-Systems im Vergleich mit der konventionellen Methode.
Die Anwendung auf Mkn 501 Daten führte im Vergleich zur konventionellen Methode zu einer Verbesserung der Auflösung der Schauerrichtung um 25%. Bei der Anwendung auf Monte Carlo Daten des Zenitwinkels von 0° wurde die Auflösung des Schauerauftreffpunkts wurde um 45% verbessert. Verbesserungen im Rechenablauf reduzierten die Rechenzeit um den Faktor 4.

Stereoscopic imaging Cherenkov telescope systems are especially suited for measurements of cosmic γ-radiation with energies above $1\,TeV$. The objective of the paper presented here is the optimization of an image processing procedure for the determination of the parameters of Cherenkov air showers, based on the HEGRA imaging Cherenkov telescope system and given by Ullrich (phd thesis 1996). The measured Cherenkov image is compared to a theoretical profile, whose underlying parameters are adjusted to a best fit. Monte Carlo data are used for the construction of the theoretical profile. The comparison is realized by minimizing a χ^2-function. The functional properties of χ^2 were analized and optimized with respect to different weighting factors. The results were tested with Monte Carlo data and measured data of the Mkn 501 source comparing the fit method with the standard geometrical reconstruction.
In comparison to the standard geometrical reconstruction application of the optimized method to Mkn 501 data improved the resolution of the shower direction by 25%. Application to Monte Carlo data improved the Stereoscopic imaging Cherenkov telescope systems are especially suited for measurements of cosmic resolution of the impact point by 45%. Improvement of the numerical data processing lead to a increase in computing rate by at least a factor of four.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Jahre 1912 entdeckte der Österreicher Viktor Franz Hess “ eine durchdringende Strahlung außerirdischer Herkunft“[1], die heute unter dem Begriff kosmische Strahlung bekannt ist.
Thema aktueller Forschung ist die Zusammensetzung und Herkunft der Strahlung. Die Zusammensetzung ist heutzutage gut erforscht. Sie besteht zu 98% aus Hadronen, zu weniger als 2% aus Leptonen und zu ca. 0.1% aus γ-Quanten [2]. Dagegen ist die Herkunft der kosmischen Strahlung noch weitgehend unbekannnt. Für die Suche nach den Quellen ist die geladene Komponente der kosmischen Strahlung ungeeignet, da sie durch die kosmischen Magnetfelder abgelenkt wird und so ihre Richtungsinformation verliert. Die ungeladene Komponente behält jedoch den vollen Informationsgehalt.

Die Atmosphäre ist für γ-Quanten undurchlässig. In einem Energiebereich bis zu einigen $10^{10}\,eV$ werden deshalb Satelliten zur Erforschung der γ-Strahlung eingesetzt. Hier ist das Compton Gamma Ray Observatory (GRO) mit den Experimenten EGRET und COMPTEL ([3], [4]) zu nennen.

Mit zunehmender Energie nimmt der Teilchenfluß stark ab, so daß Satellitenexperimente nicht mehr realisierbar sind. In diesem Energiebereich wird die Erzeugung ausgedehnter Luftschauer durch Wechselwirkung der kosmischen Strahlung mit der Atmosphäre zur Messung ausgenutzt. Mittels bodengebundener Experimente wird das Cherenkov-Licht, die Sekundärteilchen oder das Fluoreszenzleuchten dieser Luftschauer nachgewiesen. Abbildende atmospärische Cherenkov-Teleskope haben sich für den Nachweis kosmischer γ-Schauer als besonders geeignet erwiesen. Sie sind bereits ab etwa $0,5 TeV$ einsetzbar. Die von ihnen gelieferten Schauerabbilder ermöglichen im Prinzip die Rekonstruktion der Schauerrichtung, des Schauerauftreffpunktes, der Höhe des Schauermaximums sowie der Energie. Für die Analyse sind zwei Verfahren bekannt, die konventionelle geometrische Rekonstruktion, bei der die Lichtverteilung in der Kamera durch eine Ellipse angenähert wird, [5] und die Schauerrekonstruktion durch Modellanpassung ([6] und [22]). Bei der zweiten Methode wird ein, anhand von Monte Carlo Daten erzeugtes theoretische Cherenkov-Lichtbild mit dem Meßild verglichen und aus der Differenz von Modell und Bild eine χ^2-Funktion berechnet, die durch Anpassung der Schauerparameter minimiert wird. Die Parameter des Minimums beschreiben den Schauer. Diese Methode kann, verglichen mit der konventionellen Methode, prinzipiell höhere Auflösungen erreichen, da der Informationsverlust durch die Ellipsennäherung wegfällt. Sie wurde bisher allerdings nur auf reale Meßdaten von Einzelteleskopen und Monte Carlo Simulationen von Mehrteleskopsystemen angewendet. Außerdem ist sie äußerst rechen- und zeitaufwendig.

Die vorliegende Diplomarbeit befaßt sich mit Verbesserungen der Schauerrekonstruktion durch Modellanpassung (Fit). Dabei wird besonderer Augenmerk auf die Optimierung der Rechengeschwindigkeit und auf die Untersuchung und die Optimierung der Eigenschaften der χ^2-Funktion gelegt, da diese letztendlich über den Erfolg dieser Methode entscheiden. Schließlich wird die optimierte Methode an realen Meßdaten getestet und mit der konventionellen geometrischen Rekonstruktion verglichen.

Die ersten drei Kapitel befassen sich mit den Grundlagen dieser Arbeit:
In Kapitel 1 wird kurz auf das Spektrum der kosmischen Strahlung, die Entwicklung von Luftschauern in der Atmosphäre und auf die Erzeugung des atmosphärischen Cherenkov-Lichtes eingegangen.
Kapitel 2 beschäftigt sich mit mit der abbildenden Cherenkov-Technik und gibt einen Überblick über das HEGRA-Experiment auf der kanarischen Insel La Palma.
In Kapitel 3 wird die konventionelle geometrische Rekonstruktionsmethode beschrieben.
Kapitel 4 geht auf die Erzeugung des theoretischen Schauerprofils ein und diskutiert Eigenschaften und Optimierung der χ^2-Funktion.
Kapitel 5 beschreibt die Anwendung des Fits auf ein Einteleskopmodell und vergleicht die Ergebnisse mit der konventionellen Methode. Es werden außerdem zwei verschiedene Minimierungsroutinen verwendet und verglichen.
Kapitel 6 stellt die Anwendung der beiden Rekonstruktionsmethoden auf Monte Carlo Daten eines 4 Teleskopsystems angepaßt an die Begebenheiten des Teleskopsystems der HEGRA-Kollaboration dar.
In Kapitel 7 wird die Anwendung auf Meßdaten der aktiven Galaxie Mkn 501 des HEGRA Cherenkov Teleskopsystems geschildert.

Kapitel 1

Kosmische Strahlung

1.1 Geladene kosmische Strahlung

Die kosmische Strahlung besteht zu 98% aus Atomkernen. Davon sind 87% Protonen, 12% Heliumkerne und 1% schwerere Kerne. 2% der kosmischen Strahlung besteht aus Elektronen [2]. Daneben gibt es noch einen geringen Anteil von diffusen hochenergetischen γ -Quanten.
In Abbildung 1.1 ist der differentielle Gesamtfluß der kosmischen Strahlung dargestellt. Um die Anschaulichkeit zu verbessern wurde er mit $E^{2.75}$ multipliziert. Er läßt sich über eine weiten Energiebereich durch ein differentielles Potenzgesetz der Form

$$\frac{d\phi}{dE\,d\Omega} \approx 0.25\,E^{-\gamma}\ \ Teilchen/m^2\,s\,sr\,(TeV/Teilchen) \tag{1.1}$$

beschreiben.
Bis ca. $3 \cdot 10^{15} eV$ erhält man für γ den Wert 2,7. Der anschließende Energiebereich weist eine stärkere Steigung von $\gamma = 3$ auf. Den Bereich des Übergangs bezeichnet man als Knie. Es gibt mehrere Interpretationsansätze für diese Änderung. Diskutiert wird ein Wechsel der Elementzusammensetzung, eine Änderung der Herkunft der kosmischen Strahlung beim Übergang zu höheren Energien oder auch ein anderer Beschleunigungsmechanismus für hochenergetische Teilchen.
Die Quellen der kosmischen Strahlung sind bis heute unbekannt. Als wahrscheinlichste Kandidaten gelten:

- Supernovaüberreste (SNR)
- Doppelsternsysteme
- Pulsare mit assozierten Nebeln

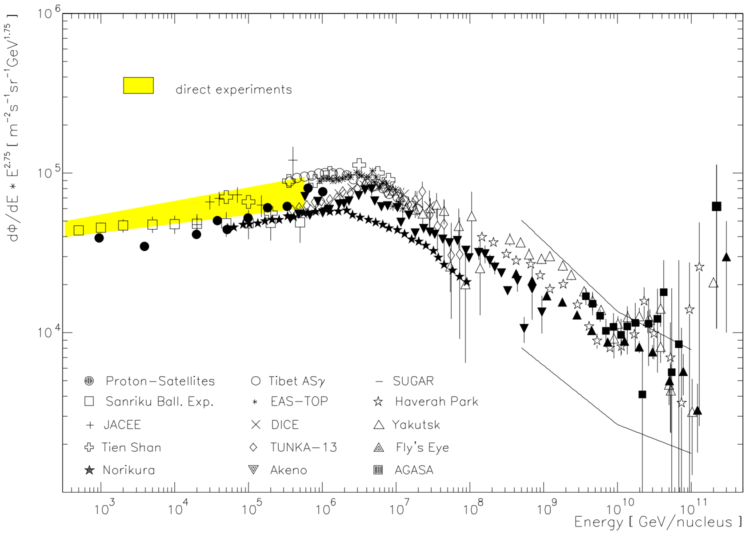


Abbildung 1.1: *Dargestellt ist der differentielle Fluß der kosmischen Strahlung multipliziert mit $E^{2.75}$ in Abhängigkeit von der Energie E [27]. Die unterschiedlichen Meßpunkte stammen von den in den Legende angegebenen Experimenten. Der schraffierte Bereich entsteht durch Extrapolation der Daten von Satelliten- und Ballonexperimenten.*

- Aktive Galaxien (AGN)

1.2 Kosmische γ-Strahlung

Hochenergetische γ-Quanten können als Sekundärprodukte bei der Erzeugung hochenergetischer geladener Teilchen in einer Quelle entstehen. Im wesentlichen spielen folgende Prozesse eine Rolle:

- bei hochenergetischen Elektronen:
  - Bremsstrahlung
  - Synchrotronstrahlung
  - inverse Comptonstreuung
- bei hochenergetischen Hadronen und Kernen:
  - π^0-Produktion bei Kern-Kern-Stößen ($\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$)
  - π^0-Produktion bei Kern-Photon-Stößen ($\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$)

1.3 Entwicklung von Luftschauern

In diesem Abschnitt wird die Entwicklung dvon Luftschauern in der Atmosphäre und die hierbei wichtigsten Wechselwirkungsprozesse beschrieben.
Man unterscheidet zwischen hadronischen und elektromagnetischen Luftschauren. Der Unterschied liegt in den auslösenden Primärteilchen des Schauers. Bei elektromagnetischen Luftschauern handelt es sich um Elektronen, Positronen oder Photonen, bei hadronischen um Protonen und schwerere Kerne. Da sich Positronen und Elektronen gleich verhalten wird in den folgenden Abschnitten stellvertretend für beide Teilchen arten nur von Elektronen gesprochen.
Trifft ein Primärteilchen auf die Atmosphäre, so wechselwirkt es mit Luftmolekülen, vorwiegend mit O_2 und N_2 Molekülen. Die hierbei erzeugten Sekundärteilchen verlieren durch Ionisationsprozesse und Vielfachstreuung Energie und erzeugen Teilchen durch weitere Wechselwirkungen mit Luftmolekülen. Es entwickelt sich eine Kaskade von Schauerteilchen, die ein Maximum erreicht, wenn die Energie der einzelnen Teilchen zu klein für die Erzeugung weiterer Teilchen ist. Danach nimmt die Anzahl aufgrund von Absorptionsprozessen und Energieverlust wieder ab.

1.3.1 Wechselwirkungsprozesse

Für beide Arten von Luftschauern wichtige Wechselwirkungsprozesse sind die Vielfachstreuung und die Ionisation. Bei elektromagnetischen Schauern spielen zusätzlich Paarbildung und Bremsstahlung eine bedeutende Rolle. Auf diese Wechselwirkungsprozesse wird im Folgenden näher eingegangen.

Ionisation

Der Energieverlust eines geladenen Teilchens in Luft wird durch die Bethe-Bloch-Formel beschrieben. Dichtekorrekturen sind nicht nötig, da Luft ein dünnes Medium ist ([29], [30]).

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{Ion} = \frac{Z^2\kappa_1}{\beta^2}\left[\log\left(\gamma^2 - 1\right) - \beta^2 + \kappa_2\right] \tag{1.2}$$

Z steht für die Kernladungszahl, β und γ für den Lorentzfaktor bzw. die Geschwindigkeit des einfallenden Teilchens mit Masse M. $\kappa_1 = 1.53 \cdot 10^{-4}\, GeV/(g/cm^2)$ und κ_2 fassen die Konstanten zusammen. Für trockene Luft gilt $\kappa_2 = 9.38$.
Da die Wechselwirkungzeit zwischen Feld und Teilchen abnimmt, verringern sich zunächst die Ionisationsverluste mit zunehmendem β. Bei einer Energie von $\approx Mc^2$ liegt das Minimum der Ionisationsverluste ($= 2 \cdot Z^2\, MeV/(g/cm^2)$). Danach erfolgt ein logarithmischer Anstieg aufgrund von relativistischen Effekten.

Vielfachstreuung

Beim Durchgang durch Materie werden Teilchen am Coulombfeld der Atomkerne gestreut. Unter Anwendung der Kleinwinkelnäherung erhält man aus dem Rutherfordschen Wirkungsquerschnitt einen mittleren Streuwinkel ϕ_0 für ein Teilchen der Ladung Ze ([31]):

$$\phi_0 \approx \frac{Z \cdot E_s}{m\gamma\beta^2} rad \tag{1.3}$$

$$E_s = mc^2\sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} \tag{1.4}$$

E_s ist die Skalenenergie in MeV, α die Feinstrukturkonstante umd m die Teilchenmasse. Der Steuwinkel ϕ folgt der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(\phi, x) = \frac{\exp\left(-\phi^2/(x\phi_0^2)\right)}{\sqrt{\pi x \phi_0^2}} \tag{1.5}$$

x stellt die durchlaufene Schichtdicke in Einheiten der Strahlungslänge X_0 dar. Unter der Strahlungslänge X_0 versteht man die Strecke, die durchlaufen wird, bis die Energie des Teilchen auf $1/e$ seines Anfangswertes abgefallen ist.
Die Einheit der Strahlungslänge ist die einer Flächendichte g/cm^2. Im Falle eines Elektrons in Luft beträgt sie $\approx 37.1\,g/cm^2$. Auf Meereshöhe entspricht dies ungefähr einer Wegstrecke von $290\,m$, die zurückgelegt wird, bis es zur Abstrahlung eines Photons kommt.
Die Skalenenergie beträgt bei Elektronen etwa $21\,MeV$. Dies ergibt einen mittleren Streuwinkel von $\sim 1°$.

Bremsstrahlung

Kreuzt die Bahn eines geladenen Teilchen das Coulombfeld eines Atomkerns, so erfährt dieses eine Beschleunigung und strahlt sogenannte Bremsstrahlung ab. Der Atomkern nimmt bei diesem Prozeß den überschüssigen Impuls und die Energie auf. Der Energieverlust (dE) den ein Teilchen der Energie E beim Durchlauf einer Strecke dx in dem Feld eines Atomkerns der Kernladungszahl Z verliert ist:

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{BS} = \frac{4e^4}{137c^4}\frac{N}{A}Z(Z+1)\frac{1}{\mu^2}E\ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right); \tag{1.6}$$

$$N = Avogadrokonstante$$

$$E,\, \mu = Energie,\, Masse\, des\, Teilchens \tag{1.7}$$

Zur Vereinfachung der Formel ist es möglich die Skalenlänge X_0 einzuführen.

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{BS} = \frac{E}{X_0} \tag{1.8}$$

$$X_0^{-1} = \frac{4e^4}{137c^4}\frac{N}{A}Z(Z+1)\frac{1}{\mu^2}\ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \tag{1.9}$$

Hieraus ergibt sich für die abgegebene Energie

$$E = E_0 \exp\left(-x/X_0\right) \tag{1.10}$$

Der Abstrahlungswinkel der Photonemission ist gegeben durch:

$$\Theta_B = \frac{\mu c^2}{E} \tag{1.11}$$

Die Abstrahlung eines hochenergetischen Elektrons erfolgt überwiegend in Vorwärtsrichtung.

Paarbildung

Im Allgemeinen versteht man unter Paarbildung die gleichzeitige Erzeugung eines Teilchen-Antiteilchenpaares. Im Falle der Schauerphysik interessiert man sich hauptsächlich für den Prozeß $\gamma \rightarrow e^+e^-$. Dieser Prozeß kann eintreten, wenn die Energie des Photons größer als die doppelte Ruhemasse eines Elektrons ist ($E \geq 1.02\,MeV$). Aufgrund der Impuls- und Energieerhaltung ist die Wechselwirkung mit einem weiteren Teilchen erforderlich, der den Rückstoß aufnimmt.
Die Paarbildung stellt im Prinzip den Umkehrprozeß der Bremsstrahlung dar. Die Wechselwirkungslänge der Paarbildung $X_{o,PB}$ steht in Beziehung zur Bremstrahlung $X_{o,BS}$.

$$X_{0,PB} = \frac{9}{7}X_{0,BS} \tag{1.12}$$

Der Öffnungswinkel des e^+e^--Paares ist ebenfalls durch Gleichung 1.11 gegeben.

Abschließend ist zu sagen, daß ein Elektron beim Durchgang durch Materie Energie im wesentlichen durch Ionisation und Bremsstrahlung verliert. Im niederenergetische Bereich überwiegen die Ionisationsverluste, im höherenergetischen die Bremsstrahlungsverluste. Bei der sogenannten kritischen Energie E_C ist der Verlust durch Bremsstrahlung und Ionisation gleich. Bei kleineren Energien als E_C werden keine Photonen mehr durch Bremsstrahlung erzeugt, der Schauer stirb langsam ab.

1.4 Einfaches Modell eines elektromagnetischen Schauers

Die longitudinale Entwicklung eines Schauers kann anhand eines einfachen Modells nach Heitler ([32]) beschrieben werden. Ionisationsverluste, die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes und der Unterschied zwischen $X_{0,PB}$ und $X_{0,BS}$ werden vernachlässigt.
Trifft ein primäres γ-Quant der Energie E_0 auf die Atmosphäre, so wird mittels Paarbildung ein Elektron-Positron Paar innerhalb der ersten Strahlungslänge X_0 erzeugt. Die Energie verteilt sich in gleichen Teilen auf die beiden Teilchens ($E_0/2$) (siehe Abbildung 1.2). Innerhalb der nächsten Strahlungslänge emittieren das Elektron und das Positron mittels Bremstrahlung ein weiteres γ-Quant mit der Hälfte der Energie, also $E_0/4$.

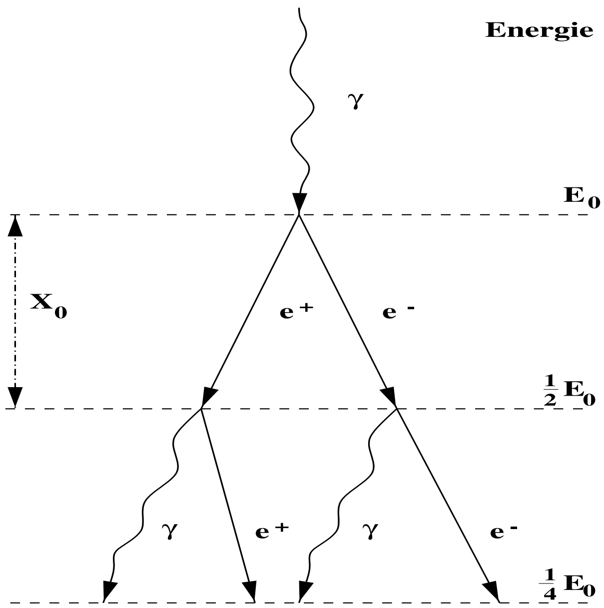


Abbildung 1.2: *Modell eines elektromagnetischen Luftschauers nach Heitler.*

Nach t Wechselwirkungslängen X_0 ergeben sich $N(t)$ Teilchen.

$$N(t) = 2^t, \tag{1.13}$$

jedes mit einer Energie $E(t)$

$$E(t) = E_0 \cdot 2^{-t} \tag{1.14}$$

Ist die Energie $E(t) \leq E_C$ verlieren die Teilchen nur noch Energie durch Ionisation und der Anzahl der Schauerteilchen nimmt ab. Für die Tiefe des Schauermaximums erhält man:

$$t = t_{max}(E_0) = \frac{\ln(E_0/E_C)}{\ln 2} \tag{1.15}$$

Die Teilchenzahl im Maximum ist

$$N_{max} = \exp(t_{max} \ln 2) = \frac{E_0}{E_C} \tag{1.16}$$

Dieses Modell weist bereits alle wesentlichen Charakteristika eines Luftschauers auf.

- Exponentieller Anstieg der Teilchenzahl bis zu einem Maximum. Danach Abfall der Teilchenzahl aufgrund von Ionisationsverlusten.
- Die Tiefe des Schauermaximums wächst logarithmisch mit der Energie E_0 des Primärteilchens an.
- Die maximale Teilchenzahl ist proportional zur Energie.

Eine analytische Beschreibung der longitudinalen Entwicklung ist in [2] gegeben. Er ist als Nishimura-Kamata-Greisen-Formalismus bekannt. Die Anzahl der Elektronen wird als Funktion der Energie E_0 des Primärteilchens und der Eindringtiefe t in Einheiten der Strahlungslänge angegeben:

$$N_e(t) = \frac{0.31}{\sqrt{\ln(E_0/E)}} \cdot e^{t(1-1.5\ln s)} \tag{1.17}$$

$$s = \frac{3t}{t + 2\ln E_0/E} \tag{1.18}$$

Dabei ist s das sogenannte Schaueralter. $s = 0$ steht für den Schaueranfang, $s = 1$ für das Schauermaximum und s erhält den Wert 2, wenn $N_e < 1$.
In Abbildung 1.3 ist die Anzahl der Elektronen eines elektromagnetischen Schauers in Abhängigkeit von der Eindringtiefe in der Atmosphäre für verschiedene Primärenergien dargestellt. Berücksichtigt wurden hierbei nur Elektronen mit einer Energie größer als $5\,MeV$. Eine Strahlungslänge entspricht bei elektromagnetischen Schauern $37\,g/cm^2$.
Die Lateralverteilung der Schauerelektronen läßt sich ebenfalls analytisch berechnen ([2], [33]). Sie wird durch Vielfachstreuung, Paarbildung sowie den Öffnungswinkel der Bremsstrahlung erzeugt. Als charakteristische Größe ergibt sich der sogenannte Molière-Radius

$$r_{Mol} = X_0 \cdot E_s/E_C = 9.6\,g/cm^2 \tag{1.19}$$

Dies entpricht auf Meereshöhe ca. $70\,m$.

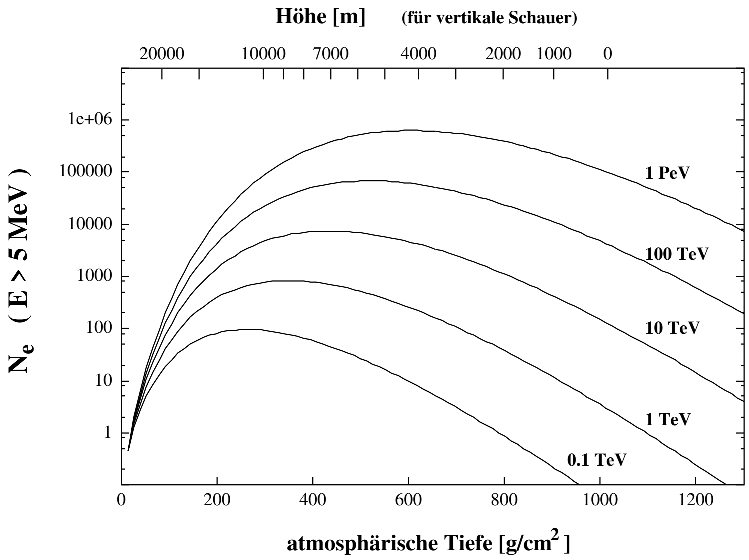


Abbildung 1.3: *Dargestellt ist die analytisch berechnete Anzahl von Elektronen mit der Energie größer $5\,MeV$ in elektromagnetischen Schauern mit verschiedenen Primärenergien in Abhängigkeit von der atmosphärischen Tiefe. Die obere Skala gibt die Höhe über NN für vertikale Schauer an. (aus [24])*

1.5 Hadronische Luftschauer

Hadronische Luftschauer werden durch Protonen und schwere Kerne erzeugt. In diesem Abschnitt werden nur solche Schauer diskutiert, die von Protonen induziert wurden.
Trifft ein Proton auf die Atmosphäre, so wechselwirkt es inelastisch mit atmosphärischen Atomkernen. Hierbei entstehen bevorzugt Pionen ($\pi^0, \pi^{\pm}$) und im geringeren Maße Kaonen und Hyperonen-Zustände (Λ, Σ und Ξ). Der Atomkern verliert dabei ein bis zwei Nukleonen und befindet sich in einem hochangeregten Zustand. Meistens zerfällt er durch Spallation in weitere Kernfragmente.
Die erzeugten neutralen Pionen besitzen nur eine sehr kurze Lebensdauer von $\tau_{\pi^0} = (8.3 \pm 0.6) \cdot 10^{-17}\,s$ ([34]). Sie zerfallen in 98.799% der Fälle in zwei γ-Quanten.

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \tag{1.20}$$

Die geladenen Pionen haben eine längere Lebensdauer ($\tau_{\pi^{\pm}} = (2.603 \pm 0.002) \cdot 10^{-8} s$). Sie können im relativistischen Grenzfall bis zu ca. $8m$ zurücklegen, bis sie zum zerfallen. Deshalb ist eine weitere Kernkollision wahrscheinlicher als ein Zerfall. Diese Kernkollision kann ähnliche Folgen wie die Proton-Kern-Kollosion haben. Bei einem

Zerfall der geladenen Pionen entstehen Myonen.

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \tag{1.21}$$
$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu_\mu} \tag{1.22}$$

Diese wechselwirken im allgemeinen nicht mit den Kernen der Atmosphäre. Aufgrund ihrer langen Lebensdauer ($\tau_{\mu^\pm} = (2.1971 \pm 0.0001) \cdot 10^{-6} s$) [34] kommt es nur selten zu Zerfällen und ihre Schwelle für Ionisationsverluste liegt außerdem so hoch, daß sie praktisch ungestört den Erdboden erreichen.

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu_\mu} \tag{1.23}$$
$$\mu^- \rightarrow e + \overline{\nu_e} + \nu_\mu \tag{1.24}$$
$$\tag{1.25}$$

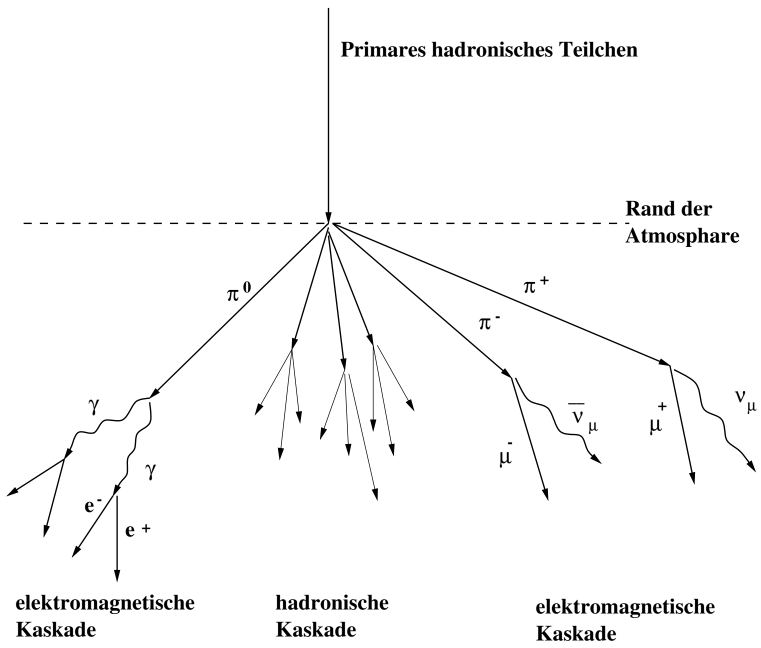


Abbildung 1.4: *Schematische Darstellung eines durch hadronische Teilchen der kosmischen Strahlung induzierten Luftschauers (übernommen aus [25]). Die Verhältnisse sind nicht maßstabsgetreu dargestellt.*

In Abbildung 1.4 sind die einzelnen Komponenten eines hadronischen Schauers schematisch dargestellt. Durch den Zerfall neutraler Pionen werden γ-Quanten emittiert, und es entstehen elektromagnetische Subkaskaden. Bei der Entwicklung eines hadronischen Schauers treten viele Zerfalls- und Wechselwirkungsprozesse auf. Teilweise kommt es hierbei zu einem Übertrag von großen Transversalimpulsen (z.B. Proton-Kern-Kollision). Dadurch weisen die elektromagnetischen Subschauer eine deutlich stärkere Entwickung in der Breite auf als ein Schauer, der durch ein primäres γ-Quant hervorgerufen wurde.

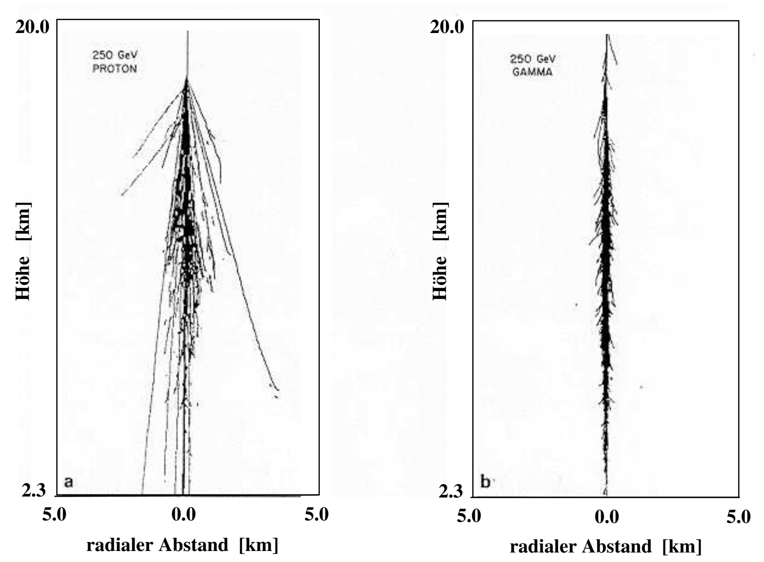


Abbildung 1.5: *Dargestellt ist die Schauerentwicklung eines* $0.25\,TeV$ *Proton-Schauers (links) und eines* $0.25\,TeV$ γ*-Schauers (rechts).*

Dies zeigt Abbildung 1.5. Man sieht die Entwicklung eines elektromagnetischen sowie eines hadronischen Schauers. Man erkennt, daß ein Hadronschauer bedeutend breiter ist als ein elektromagnetischer Schauer.

1.6 Der Cherenkov Effekt

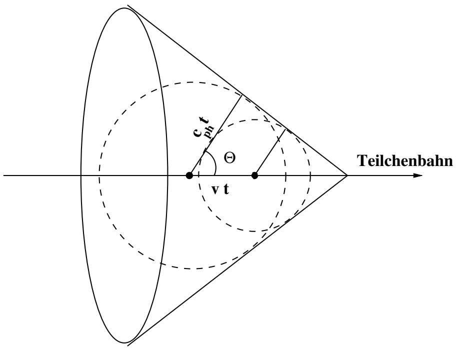


Abbildung 1.6: *Schematische Darstellung des Cherenkov Effektes*

Bewegt sich ein geladenes Teilchen mit einer Geschwindigkeit $v > c/n$ durch ein polarisierbares Medium vom Brechungsindex n, so emittiert es Cherenkov Licht.
Dieser Effekt läßt sich durch folgende Überlegung anschaulich erklären: durchquert ein geladenes Teilchen Materie, so polarisiert es längst seiner Bahn kurzzeitig alle benachbarten Moleküle. Diese werden zu elektrischen Dipolen. Eine kurzzeitige Veränderung des Dipolfeldes führt zur Emission von elektromagnetischer Strahlung. Bei Geschwindigkeiten, die kleiner sind als die Lichtgeschwindigkeit in diesem Medium, ergibt sich eine symmetrische Anordnung der Dipole entlang der Teilchenbahn. Dies hat zur Folge, daß das Gesamtdipolmoment Null ist. Wenn aber die Bedingung $v > c/n$ erfüllt ist, stellt sich eine asymmetrische Dipolverteilung ein und Cherenkov Licht wird emittiert.
Die Strahlung breitet sich kegelförmig symmetrisch zur Teilchenbahn aus. Der Öffnungswinkel der kegelförmigen Strahlungsfront läßt sich in Analogie zum Machschen Kegel folgendermaßen berechnen (in Abbildung 1.6 dargestellt):

$$\cos\theta_C = \frac{c}{vn} = \frac{1}{n\beta} \tag{1.26}$$

c bezeichnet die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit und $\beta = v/c$ die Teilchengeschwindigkeit in Einheiten von c. Nur oberhalb einer Grenzgeschwindigkeit $\beta_G > 1/n$ tritt der Cherenkov Effekt auf. Für Luft errechnet man einen Wert von $\beta_G \approx 0.9997$.

Zwei Grenzfälle sind besonders interessant. Wenn sich das Teilchen mit Grenzgeschwindigkeit bewegt, wird das Cherenkov Licht genau in Vorwärtsrichtung ausgestrahlt. Der andere Grenzfall ergibt sich für die Teilchengeschwindigkeit $\beta = 1$. Hier ergibt sich der größte mögliche Cherenkov Winkel zu:

$$\theta_{(C,max)} = \arccos\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1.27}$$

Man erkennt sofort, daß Cherenkov Licht nur in einem Medium mit Brechungsindex $n > 1$ emittiert werden kann.
Aus der Grenzgeschwindigkeit errechnet sich die notwendige Mindestenergie. Diese Energieschwelle ist gegeben durch:

$$E_G = \frac{m_0\, c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \tag{1.28}$$

m_0 ist die Ruhemasse des Teilchens. Für Elektronen in Luft erhält man eine Schwellenenergie E_G von 21 MeV (Brechungsindex von Luft unter Normalbedingungen $n_{Luft} \approx 1.000293$).
Mit Hilfe der Maxwellschen Theorie läßt sich der Energieverlust dE eines Teilchens der Ladung $z\,e$ entlang der Wegstrecke dx berechnen:

$$-\frac{dE}{dx} = z^2\,\frac{\alpha\hbar}{c}\int_{\beta n(\omega)>1} d\omega\,\omega\left(1 - \frac{1}{\beta^2\,n(\omega)^2}\right) \tag{1.29}$$

Dabei ist α die Feinstrukturkonstante und $\hbar$ ist die Planck-Konstante. Daraus folgt die Anzahl der Photonen, die im Wellenlängenbereich von λ_1 bis λ_2 abgestrahlt werden:

$$-\frac{dN}{dx} = 2\,\pi\,z^2\,\alpha\sin^2\theta_C\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{d\lambda}{\lambda^2} \tag{1.30}$$

Für den Wellenlängenbereich zwischen $300\,nm$ und $600\,nm$ erwartet man einen Wert von $\sim 764\,\sin^2\theta_C\;Photonen\;cm^{-1}$. Der Brechungsindex n ist von der Dichte abhängig. Deshalb emittiert ein Schauerelektron, das in $8km$ Höhe Cherenkov Licht ($\theta_C \approx 0.8°$) erzeugt, 0.23 Cherenkov-Photonen cm^{-1}, während es auf Meereshöhe ($\theta_C \approx 1.4°$) ca. 0.46 Cherenkov Photonen cm^{-1} aussenden würde.

1.7 Erzeugung von atmosphärischem Cherenkov Licht durch Luftschauer

Die Atmospähre kann in erster Näherung als isotherm angesehen und durch die Barometrische Höhenformel beschrieben werden. Setzt man den Brechungindex n proportional zur Dichte an, so erhält man:

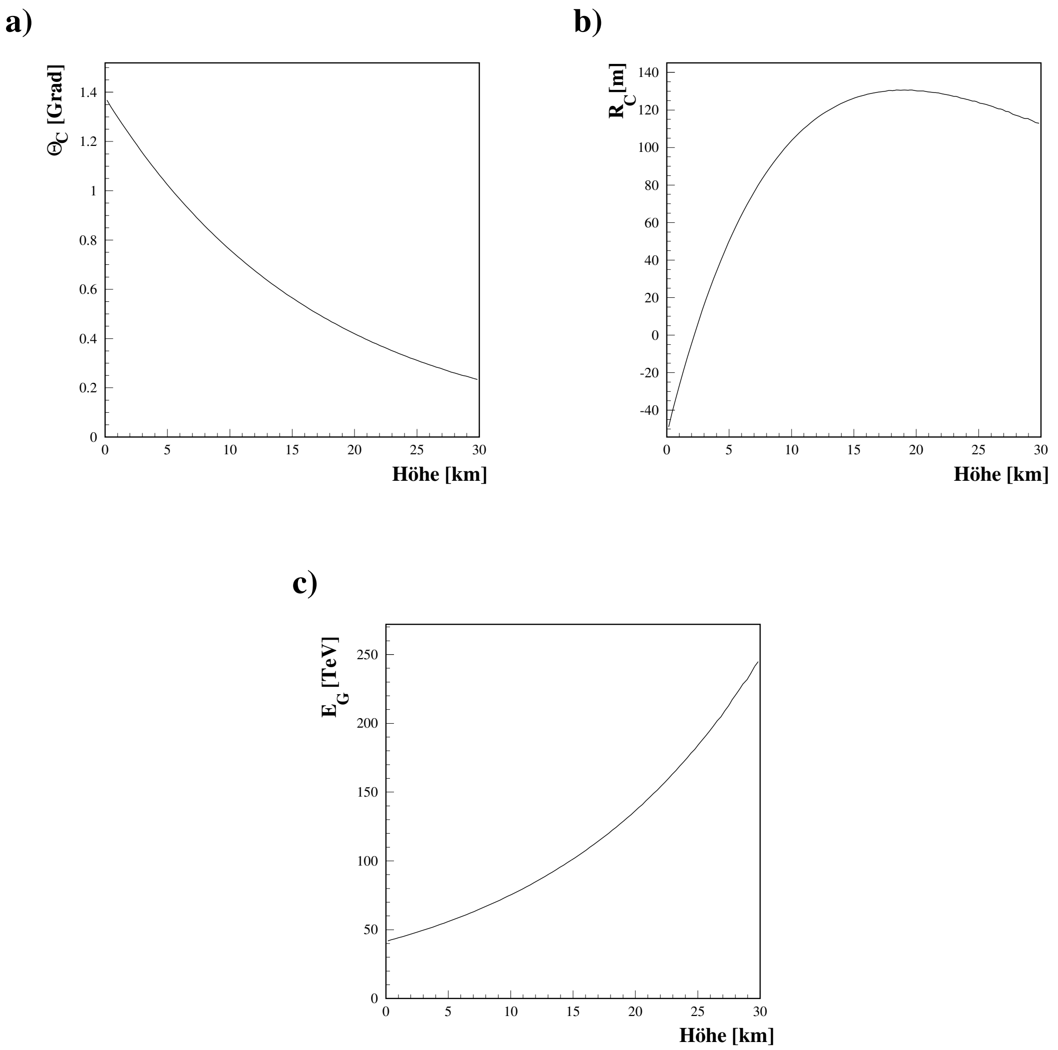


Abbildung 1.7: *Dargestellt sind a) $\Theta_C(h)$, b) $R_C(h)$ und c) $E_G(h)$ Die Werte beziehen sich auf La Palma ($H_0 = 2200m$)*

$$n(h) = 1 + \eta \cdot \exp\left(-h/h_0\right) \tag{1.31}$$

Typische Werte sind für die Skalenhöhe h_0 $8.4\,km$ und für η 0.00029. Die Grenzgeschwindigkeit, die Schwellenenergie E_G und der Öffnungswinkel hängen vom Brechungsindex und daher von der Höhe ab. Dies ist in Abbildung 1.7 gezeigt. Ein Teilchen im Luftschauer erfährt deshalb eine kontinuierliche Änderung des Brechungsindexes. Es emittiert Cherenkov Licht, wenn und solange seine Energie einen größeren Wert als die Schwellenenergie E_G aufweist. Für die Cherenkov Strahlung sind vor allem Elektronen und Positronen verantwortlich, denn die Schwellenenergie der anderen Teilchenarten ist wegen ihrer größeren Masse (Pionen, Myonen) um einen Faktor 200 bis 300 höher. Die Höhenabhängigkeit des Brechungsindex hat außerdem zur Folge, daß sich der Cherenkov Winkel θ_C mit der Höhe ändert. Der Cherenkov Radius am Boden ist gegeben durch (siehe Abbildung 1.7 b)):

$$R_C = (h - h_B) \cdot \tan\theta_C \approx (h - h_B) \cdot \theta_C \tag{1.32}$$
$$h_B = Nachweish\ddot{o}he$$

Cherenkov Licht eines Elektrons, das senkrecht zum Boden einfällt, trifft in einem Kreis mit Radius $\leq 120m$ am Boden auf.
Aufgrund der Vielfachstreuung im Schauer werden die Teilchen aus der Schauerachse abgelenkt, was zu einer Verschmierung der Lichtverteilung auf dem Beobachtungsniveau führt. Die Kreisfläche wird mit dem Licht von stark gestreuten Elektronen des Schauerendes ausgefüllt.

Dies ist in Abbildung 1.8 gezeigt. Hier ist die Photonenverteilung am Boden für einen elektromagnetischen Schauer der Energie $0.3\,TeV$ und einen Protonen- Schauer der Energie $1\,TeV$ dargestellt. Man erkennt deutliche Unterschiede zwischen den beiden Luftschauertypen. Die Photonendicht des elektromagnetischen Schauer ist zwischen $50 - 120\,m$ nahezu homogen. Sie nimmt nach inne leicht und nach außen stark ab.

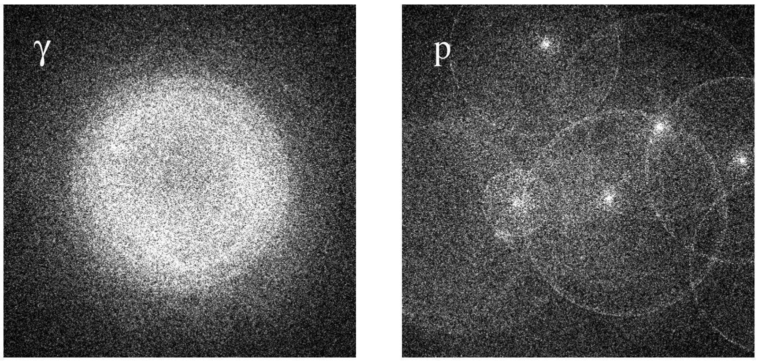


Abbildung 1.8: *Simulation der Photonenverteilung auf Beobachtungsniveau 2200m in einem Bereich von $400\,m \cdot 400\,m$ für einen elektromagnetische Schauer der Energie $0.3\,TeV$ (links) und einen Protonen-Schauer der Energie $1\,TeV$; es wurde keine Extinktion berücksichtigt, die Grauskalen sind untercshiedlich gewählt, die Bilder zeigen deshalb nur qualitative Unterschiede. (CORSIKA-Simulation von K. Bernlöhr).*

Beim hadronischen Schauer ist die Überlagerung mehrerer Subkaskaden zu erkennen.

1.8 Abschwächung des Cherenkov Lichtes

Beim Durchgang durch die Atmosphäre wird das Cherenkov Licht durch Streuung an Luftmolekülen und Aerosolen sowie durch Absorption geschwächt. Die wichtigsten Prozesse sind die Rayleigh-Streuung, die Mie-Streuung sowie die Absorption durch Ozon. Die Abschwächung läßt sich durch das Lambert-Beersche-Gesetz beschreiben.

$$dI = -I_0\, \alpha\, dx \tag{1.33}$$

Der Extinktionskoeffizient α umfaßt hierbei alle obengenannten Prozesse, die im Folgenden noch näher erläutert werden.

Rayleigh-Streuung

Die Rayleigh-Streuung erfolgt durch Wechselwirkung mit polarisierbaren Molekülen, deren Größe kleiner als die Wellenlänge des Lichtes ist (Durchmesser $d \ll \lambda$).
Der Wirkungsquerschnitt dieses Prozesses ist gegeben durch:

$$\frac{d\sigma_{Ray}}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\lambda^4 \rho^2}(n-1)(1+\cos^2\phi) \tag{1.34}$$

ρ bezeichnet die Dichte der Atmospäre. Wegen der $1/\lambda^4$ - Abhängigkeit wird hauptsächlich das kurzwellige Licht gestreut.

Mie-Streuung

Die Mie-Streuung findet an Aerosolen statt, deren Teilchengröße der Wellenlänge des Cherenkov Lichtes entspricht ($d \geq \lambda$). Sie hängt stark von der Größenverteilung der streuenden Teilchen in der Atmosphäre ab. Unter der Annahme einer bestimmten Standardverteilung der Partikelgröße, der sog. Junge-Verteilung, ergibt sich eine Wellenlängenabängigkeit $\sim \lambda^{1\cdots1.5}$.

Absorption durch Ozon

Ozon absorbiert Cherenkov Licht durch Photodissoziation.

$$O_3 + h\nu \longrightarrow O_2 + O$$

Durch diesen Prozeß werden vor allem Photonen des Wellenlängenbereiches zwischen 200 und 300 nm absorbiert. Insgesamt ergibt sich eine komplexe Abhängigkeit des Extinktionskoeffizienten α von der Wellenlänge.

Kapitel 2

Die abbildende Cherenkov Technik

2.1 Abbildung von Luftschauern mittels Cherenkov Teleskopen

In den folgenden Abschnitten wird das Abbildungsprinzip der Cherenkov Teleskope, sowie die Charakteristik der Bilder von Luftschauern beschrieben.
Bei Cherenkov Teleskopen wird das emittierte Cherenkov Licht mittels eines sphärischen oder parabolischen Spiegels auf eine in der Brennebene montierten Kamera fokussiert.

2.1.1 Abbildungsprinzip der Cherenkovteleskope

Die Abbildung eines Luftschauers ist eine Überlagerung von Bildern der einzelnen Teilchen, denn jedes Teilchen stellt ja infolge der Emission von Cherenkov Licht eine einzelne punktförmige Lichtquelle dar. Um das Prinzip der Cherenkov Technik zu erklären, wird zuerst nur ein einzelnes Schauerteilchen herausgegriffen, das sich parallel zur Teleskopachse bewegt. Dabei sei die Entfernung sehr groß im Verhältnis zu den Dimensionen des Spiegels. Diese vereinfachenden Annahmen sind durchaus realistisch, da die Teleskope, wenn eine Punktquelle Ursprung der kosmischen Strahlung ist, in Richtung der Quellposition ausgerichtet werden, und auch weil sich das Maximum der Lichtemission in mehreren Kilometern Höhe befindet. Nach der Ableitung des grundlegenden Prinzips werden dann die für reale Schauer notwendigen Korrekturen besprochen.

Abbildung 2.1a) zeigt ein Schauerteilchen, das im Abstand R vom Teleskop auftrifft. Das emittierte Cherenkov Licht trifft mit einem für die Emissionshöhe charakteristischen Einfallswinkel auf den Spiegel und wird auf eine Gerade, die zum

Kamerazentrum weist, abgebildet.

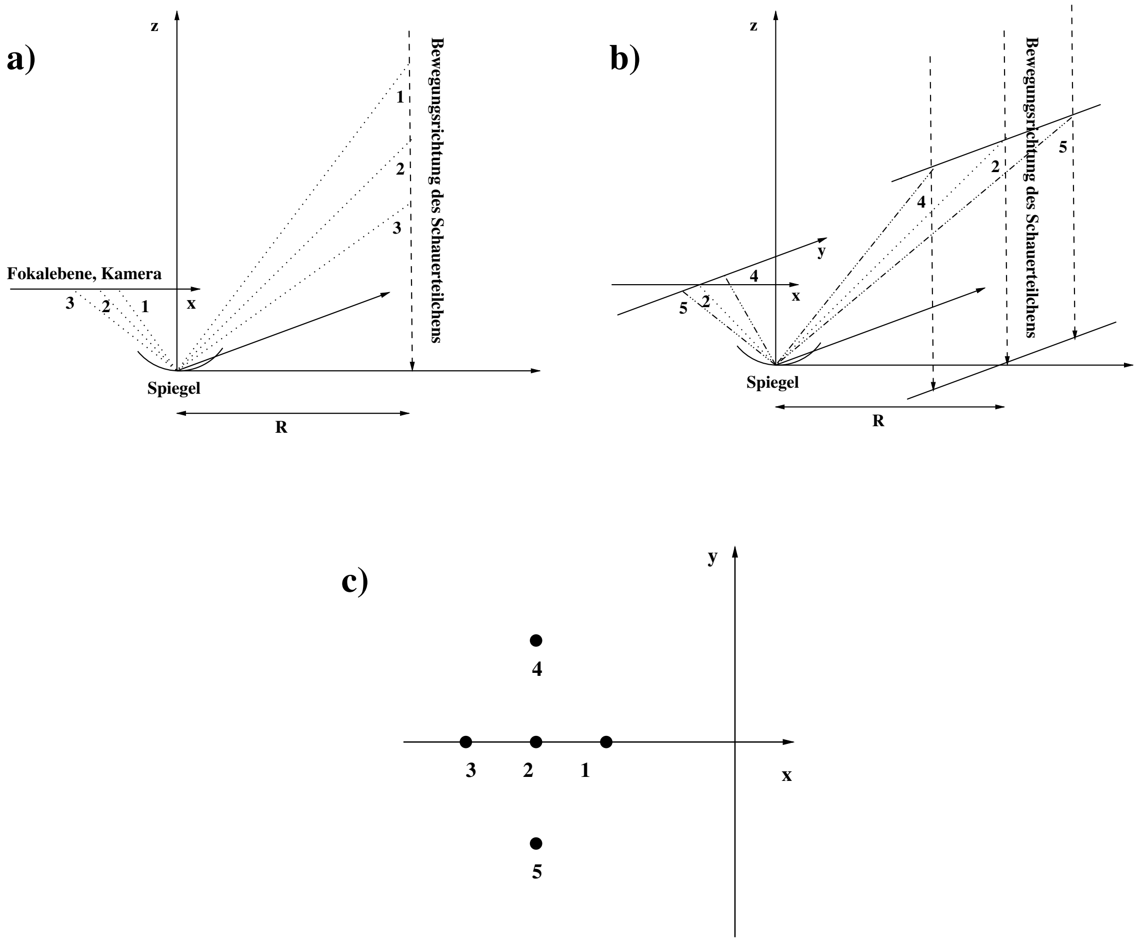


Abbildung 2.1: *Abbildungsprinzip der Cherenkov Teleskope anhand eines Schauerteilchens. a) schematische Darstellung der Longtidunalentwicklung. b) schematische Darstellung der Transversalentwicklung des Schauers c) Abbild in der Kameraebene*

In Abbildung 2.1b) bedeutet das entlang der x-Achse, was durch die Punkte 1,2 und 3 dargestellt wird.
Zwischen den Punkten der Abbildung und dem Emissionswinkel besteht der Zusammenhang:

$$\tan\Theta \approx \Theta = \frac{x}{f} \tag{2.1}$$

f bezeichnet die Brennweite des Spiegels.
Licht mit einem festen Einfallswinkel wird auf den gleichen Punkt abgebildet.

Bei einem einzelnen Teilchen entspricht nach Gleichung 2.1 jeder Punkt einer bestimmten Emissionshöhe. Ein parallel zur optischen Achse einfallendes Teilchen erzeugt eine Gerade. Bei einem realen Schauer, der sich parallel zur optischen Achse ausbreitet, ist das Bild also eine Gerade, deren Intensitätsverteilung
die Intensitätsverteilung des Lichtes wiederspiegelt, das entlang der Schauerachse emittiert wird. Man man nennt dies das *Longitudinale Profil*.
Ein realer Schauer besitzt Streukomponenten in der Ebene senkrecht zum Schauer, die ebenfalls berücksichtigt werden müssen. Um das zu diskutieren, betrachten wir in Abbildung 2.1b) die Lichtquelle am Punkt 2 und erweitern die Betrachtung um 2 zusätzliche Lichtquellen, die sich in gleicher Höhe befinden, aber senkrecht zur x-Richtung, also in y-Richtung, um den gleichen Betrag in unterschiedlicher Richtung gegen ihn verschoben sind. Das von ihnen emittierte Cherenkov Licht wird auf zwei Punkte abgebildet, die in der Bildebene ebenfalls in y-Richtung verschoben sind (siehe Abbildungen 2.1b und c). Diese definieren mit dem Bild der zentralen Lichtquelle am Punkt 2 eine Gerade, die einer bestimmten Emissionshöhe und damit einem bestimmten Punkt des Longitudinalen Profils entspricht. Die Intensitätsverteilung auf dieser Geraden heißt *Transversales Profil*. Zu jeder Emissionshöhe, also zu jedem Punkt des Longitudinalen Profils, gehört ein bestimmtes Transversales Profil.

Die Intensitätsverteilung in der Bildebene weist in erster Näherung eine elliptische Gestalt auf. Das bedeutet, daß das Bild in x- und y-Richtung in etwa symmetrisch ist. Diese Symmetrie ist in y-Richtung recht gut erfüllt, in x-Richtung dagegen weitaus schlechter. Das ist auch theoretisch zu erwarten, denn aufgrund der Vielfachstreuung entfernen sich die Teilchen im Schauer mit zunehmender Atmosphärischer Tiefe immer weiter von der Schauerachse. Dabei ändert sich nicht nur der Abstand von der Schauerachse sondern auch die Bewegungsrichtung. Dies hat zur Folge, daß sich das Transversale Profil mit zunehmender atmosphärischen Tiefe verbreitert.

Liegt die Schauerrichtung nicht parallel zur Teleskopachse, so ändert sich die Orientierung der Ellipse in der Kamera. Bei einer Neigung (Θ_x, Θ_y) relativ zur Teleskopachse hat dies eine Verschiebung der Ellipse um (Θ_x, Θ_y) zur Folge. Hierbei wurde eine Kleinwinkelnäherung angewendet.
Ein weiterer freier Parameter der Abbildung ist der Abstand vom Teleskop zur Schauerachse. Der Winkel des nachgewiesenen Cherenkov Lichtes ist hiervon abhängig. Es gilt:

$$\Theta = \frac{R}{h} \tag{2.2}$$

Ein größerer Schauerabstand bewirkt eine Verschiebung des Bildes in der Kamera sowie eine Verlängerung.

Einfluß der Fluktuation des Schauers in der Tiefe

Die Entwicklung eines Schauers ist Fluktuationen unterworfen, was wiederum Auswirkungen auf die Lage des Bildes in der Kamera hat. Bei einem $1\,TeV$ γ-Schauer wird zwischen 4 und $8\,km$ Höhe ca. 50% des gesamten Cherenkov Lichtes emittiert. Wird dieser Bereich der maximalen Abstrahlung nach oben verschoben, so wandert das Abbild weiter in Richtung Kamerarand.
Mathematisch kann dieser Effekt folgendermaßen beschrieben werden. Sei $\rho(\Theta_{max})$ die maximale Cherenkov-Lichtintentensität der Emissionshöhe h_1, so gilt bei Einfall des Schauers parallel zur optischen Achse nach Gleichung 2.2 $\Theta_{max}(h_1) = R/h_1$. Nach der Durchführung einer Taylorentwicklung bis zum linearen Glied erhält man:

$$\Theta'_{max} \approx \Theta_{max} + \frac{d\Theta}{dh}\Delta h = \Theta_{max} - \frac{R}{h_1^2}\Delta h = \Theta_{max}\Big(1 - \frac{\Delta h}{h_1}\Big) \tag{2.3}$$

Ausgedrückt mit Hilfe der atmosphärischen Tiefe X

$$\Theta'_{max} = \frac{R}{h_0 \ln \frac{X}{X_{N.N.}}} \approx \Theta_{max}\Big(1 - \Big[\frac{X_{max}}{X_{N.N.}}\Big]^{-1} \frac{\Delta X}{X_{max}}\Big) \tag{2.4}$$

Nach einer Verschiebung der Abstrahlung um Δh mißt man die gleiche Intensität unter dem veränderten Winkel Θ'_{max}.

2.2 Die Bildparameter

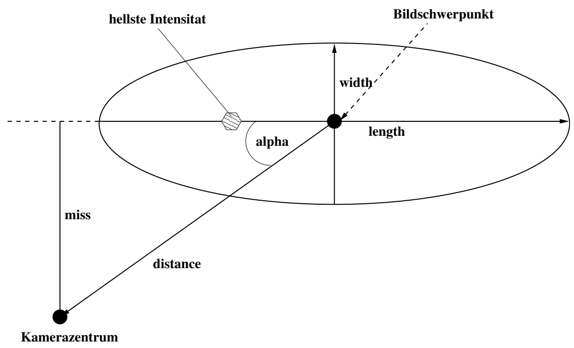


Abbildung 2.2: *Schematische Darstellung des Abbildes eines Schauers in der Kamera. Eingezeichnet sind die Hillas Parameter.*

Eine effektive Parameterisierng des Schauerprofiles in der Kamera wurde von Hillas [5] eingeführt. Hierbei wird die Lichtverteilung in der Kamera durch eine Ellipse angenähert und die Hauptachsen, die mittlere quadratische Länge und Breite der Verteilung berechnet.
Die wichtigsten Hillas-Parameter stellen *length, width* und *distance* dar.
Seien a_i die Amplitude und (x_i, y_i) die Koordinaten des i-ten Pixels im Kamerakoordinatensystems (siehe 3.1), sowie (x_0, y_0) der Punkt, bzgl. dem die Parameter berechnet werden, so gilt:

$$
\begin{aligned}
< x > &= \frac{\sum_i a_i(x_i - x_0)}{\sum_i a_i} \\
< y > &= \frac{\sum_i a_i(y_i - y_0)}{\sum_i a_i} \\
< x^2 > &= \frac{\sum_i a_i(x_i - x_0)^2}{\sum_i a_i} \\
< y^2 > &= \frac{\sum_i a_i(y_i - y_0)^2}{\sum_i a_i} \\
< xy > &= \frac{\sum_i a_i(y_i - y_0)(x_i - x_0)}{\sum_i a_i}
\end{aligned}
$$

Setzt man

$$
\begin{aligned}
\sigma_{x^2} &= < x >^2 - < x^2 > \\
\sigma_{y^2} &= < y >^2 - < y^2 > \\
\sigma_{xy} &= < xy > - < x >< y > \\
d &= \sigma_{x^2} - \sigma_{y^2} \\
l &= \sqrt{d^2 + 4\sigma_{xy}^2}
\end{aligned}
$$

So erhält man für *width, length* und *distance*

$$
\begin{aligned}
< length > &= \sqrt{\frac{\sigma_{x^2} + \sigma_{y^2} + l}{2}} \qquad (2.5) \\
< width > &= \sqrt{\frac{\sigma_{x^2} + \sigma_{y^2} - l}{2}} \qquad (2.6) \\
< distance > &= \sqrt{< x^2 > + < y^2 >} \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

2.3 Das HEGRA Experiment

HEGRA steht für **H**igh **E**nergy **G**amma **R**ay **A**stronomy. Das Experiment befindet sich auf der Kanarischen Insel La Palma auf dem Gelände des Observatorio del Roque de los Muchachos in einer Höhe von 2200 m über N.N. und einer geographischen Lage von $28.8°N, 17.9°W$. Betrieben wird das Observatorium vom Instituto del Astrofisica de Canarias (IAC).

Die HEGRA Kollaboration setzt sich aus mehreren deutschen und ausländischen Instituten zusammen. Es handelt sich hierbei um die Universität Hamburg, das MPI für Kernphysik Heidelberg, die Universität Kiel, das MPI für Physik in München, die Universität Madrid, das Physikalische Institut Yerevan und die Universität Wuppertal.

Das Experiment umfaßt 4 Detektortypen, die es ermöglichen, die unterschiedlichen Bestandteile von Luftschauern, die durch kosmische Strahlung ausgelöst werden, gleichzeitig über einen großen Winkelbereich zu messen. Dazu sind Detektoren mit ausgedehntem Gesichtsfeld auf einem Gebiet von $40000m^2$ verteilt. Es handelt sich hierbei um Szintillations-Zähler, offene Cherenkov-Zähler und Geiger-Türme. Die untere Energieschwelle dieses Systems liegt bei einigen $10\,TeV$.
Zur Beobachtung von Quellen hochenergetischer γ-Strahlung befindet sich dort ebenfalls ein System abbildender atmosphärischer Cherenvov Teleskope (**I**maging **A**tmospheric **C**herekov **T**elescopes, sogenannte IACTs). Sie haben ein kleineres Gesichtsfeld und eine niedrigere Energieschwelle von nur $0.5\,TeV$.

Im folgenden Abschnitt wird das Teleskop System genauer beschrieben. Eine vollständige Beschreibung der HEGRA-Arrays geben [18] und [19].

2.3.1 Das HEGRA Cherenkov Teleskopsystem

Das Cherenkov Teleskopsystem besteht aus 6 Teleskopen. Bis September 1998 wurden 2 Prototypteleskope im Einzelbetrieb und die restlichen 4 Teleskope als System betrieben. Im September 1998 wurde die Kamera des Prototyps CT2 durch eine Systemkamera ersetzt und in das System aufgenommen.
Eine Beschreibung der Prototypteleskope ist in [20],[21] und [18] gegeben. In Tabelle 2.3.1 sind die Charakteristika der Teleskope zusammengestellt.
Abbildung 2.3 zeigt ein Systemteleskop und Abildung 2.4 die dazugehörige Kamera.

Die Spiegelfläche des Prototyp Teleskops CT1 wurde Ende 1997 von $5m^2$ auf $10m^2$

Teleskop	Montierung	Spiegelfläche [m^2]	Blickfeld [°]	Pixel	Pixelgröße
CT1	Äquatorial	$5.0 \rightarrow 10.0$	3.2	127	0.25
CT2	Alt-Az	8.5	$3.6 \rightarrow 4.3$	$61 \rightarrow 271$	$0.43 \rightarrow 0.25$
CT3-6	Alt-Az	8.5	4.3	271	0.25

Tabelle 2.1: *Charakteristika der HEGRA-Cherenkov-Teleskope*

erhöht, dies führte zu einer deutlichen Erhöhung der Sensitivität.

Die Zusammenschaltung von zwei oder mehr Teleskopen zu einem stereoskopischen System ermöglicht eine dreidimensionale Rekonstruktion der Schauerachse. Wie das im Einzelnen geschieht, wird im Kapitel 3 geschildert.

Die Systemteleskope wurden in einem Abstand von 70 bis $80m$ aufgestellt. Dies liegt einwenig unter der Radius des Cherenkov Lichtkegels und stellt somit sicher, daß mehrere Teleskope gleichzeitig ein Signal erhalten, triggern und damit die zur stereoskopischen Auswertung erforderlichen Daten liefern.
Die Systemteleskope sind mit jeweils $8,5m^2$ Spiegelfläche ausgestattet bei einer Brennweite von $5m$. Dies führt bei einer Pixelgröße von $21mm$ zu einem Blickfeld des Einzelpixels von 0.25°. Die Kamera besteht aus 271 hexagonalen Pixeln mit jeweils einem Photomultiplier. Daraus ergibt sich ein Gesamtblickfeld von 4.3°. Das System ist mit einem zweistufigen Trigger ausgestattet. Dieser überprüft zuerst für jedes einzelne Teleskop, ob zwei benachbarte Pixel eine Amplitude oberhalb von 8 Photoelektronen aufweisen. Es handelt sich hierbei um einen sogenannten lokalen Trigger. Erfüllt ein Teleskop diese Bedingung, so muß innerhalb von $70ns$ ein weiteres Teleskop einen lokalen Trigger auslesen. Erst dann wird die Datenauslese gestartet. Dieser System-Trigger zeichnet sich durch eine besonders effektive Unterdrückung von Untergrundereignissen aus, die durch Nachthimmelslicht und elektronisches Rauschen erzeugt werden.

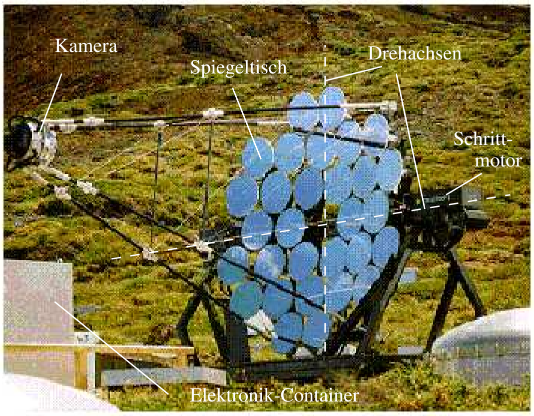


Abbildung 2.3: *Das zentrale Teleskop CT3 des HEGRA Cherenkov Teleskopsystems.*

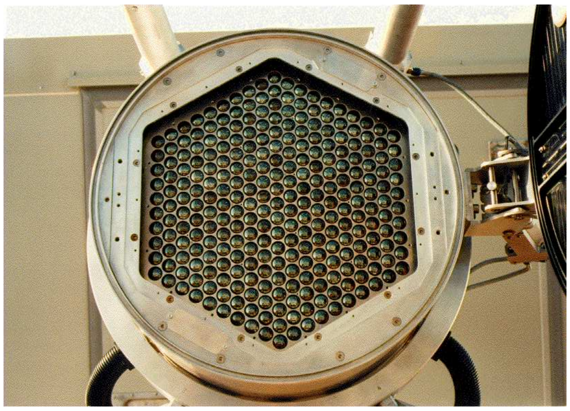


Abbildung 2.4: *Photomultiplier-Matrix des zentralen Teleskops CT3.*

Kapitel 3

Die geometrische Rekonstruktion

Die geometrischen Verhältnisse in einem Teleskopsystem sind sehr komplex. Bei jeder Rekonstruktion müssen geometrische Bedingungen wie beispielsweise die Lage und Ausrichtung jedes einzelnen Teleskops, die Lage jedes einzelnen Pixels in jeder Kamera und die das Bild in jeder Kamera beschreibenden Parameter berücksichtigt werden. Durch geschickt gewählte Koordinatensysteme, die jeweils bestimmte Details einfach darzustellen vermögen, kann die Rechnung sehr vereinfacht werden. Dafür entsteht zusätzlicher Rechenaufwand durch notwendige Koordinatentransformationen. Im folgenden werden die für den Rechengang wichtigen Koordinatensysteme definiert. Danach erfolgt die Beschreibung der Rekonstruktion der Schauerneigung, des Schauerauftreffpunktes und der Schauerenergie.

Referenzkoordinatensystem und Teleskopkoordinatensystem

3.1 Die Koordinatensysteme

Die Lage der Teleskope wird im sogenannten Referenzkoordinatensystem angegeben. Es handelt sich hierbei um ein kartesisches Koordinatensystem, dessen x_{ref}-Achse nach Norden, y_{ref}-Achse nach Westen und z_{ref}-Achse zum Zenit zeigt. Das zentrale Teleskop CT3 definiert den Ursprung. Durch die Verschiebung des Koordinatensystems um die jeweiligen Koordinaten des Teleskops wird das Referenzkoordinatensystem in das Teleskopkoordinatensystem überführt. Diese Verschiebung berücksichtigt nur die Lage des einzelnen Teleskops. Außerdem muß die Ausrichtung des Teleskops in das Teleskopkoordinatensystem eingehen. Dafür sind zwei Drehungen erforderlich. Wegen der azimutalen Montierung der HEGRA Cherenkov Teleskope sind dies eine Drehung um die Azimutachse und eine Drehung um die Höhenachse. Die Einzelheiten der erforderlichen Transformationen und die Vorgehensweise bei äquatorialer Montierung finden sich unter [6].

Kamerakoordinatensystem

Zur Beschreibung der Bilder in der Kamera und der Berechnung der Bildparameter ist es sinnvoll, ein Koordinatensystem zu wählen, das eine feste Beziehung zur Kamera hat. Das Kamerakoordinatensystem ist dadurch definiert, daß seine z_{kam}-Achse in Richtung der optischen Achse des Teleskops zeigt und seine x_{kam}- und y_{kam}-Achse die Bildebene aufspannen. In Abbildung 3.1 ist der Zusammenhang zwischen dem Kamerakoordinatensystem und dem Teleskopkoordinatensystem dargestellt. Das Teleskopkoordinatensystem kann durch folgende Transformationen in das

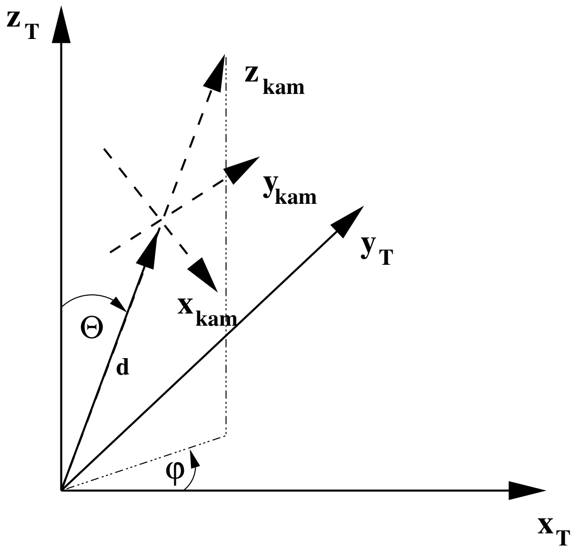


Abbildung 3.1: *Dargestellt ist die relative Lage des Kamerakoordinatensystems* $(x_{kam}, y_{kam}, z_{kam})$ *im Vergleich zum Teleskopkoordinatensystem* (x_T, y_T, z_T). φ *bezeichnet den Azimutwinkel,* Θ *den Zenitwinkel.*

Kamerakoordinatensystem überführt werden.

1. Drehung um den Azimutwinkel φ um die z_T-Achse.

2. Drehung um den Zenitwinkel Θ um die y-Achse des gedrehten Teleskopkoordinatensystems.

3. Verschiebung entlang der z-Achse, so daß die x- und y-Achse in der Bildebene der Kamera landen.

Fitkoordinatensystem

Ein weiteres wichtiges Koordinatensystem ist das sogenannte Fitkoordinatensystem, das zur Beschreibung der Bildparameter besonders geeignet ist. Dieses kartesische Koordinatensystem ist dadurch definiert, daß die Schauerrichtung die x_{fit}-Achse vorgibt. Der Ursprung wird durch den Punkt $(-\Theta_x,\ -\Theta_y)$ der Kameraebene definiert, auf den die Quellposition (Schauerachse) abgebildet wird. (siehe Abbildung 3.2).

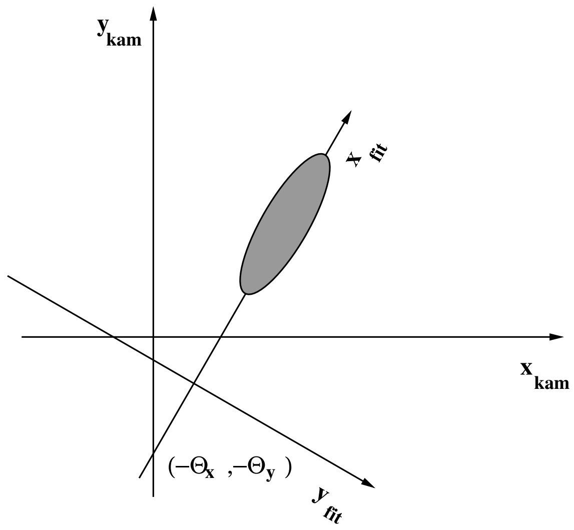


Abbildung 3.2: *Dargestellt ist die relative Lage des Kamerakoordinatensystems zum Fitkoordinatensystem.*

Die Transformation vom Kamerakoordinatensystem ins Fitkoordinatensystem lautet:

$$x_{fit} = -(x_{kam} - \Theta_x)\,\frac{R_y}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}} + (y_{kam} - \Theta_y)\,\frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}} \tag{3.1}$$

$$y_{fit} = -(x_{kam} - \Theta_x)\,\frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}} - (y_{kam} - \Theta_y)\,\frac{R_y}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}} \tag{3.2}$$

(R_x, R_y) ist der Abstand in (x,y)-Richtung zwischen dem jeweiligen Teleskop und dem Schauerauftreffpunkt. (Θ_x, Θ_y) stellt die Schauerneigung dar.

3.2 Rekonstruktion der Schauerneigung

Licht das in großer Höhe abgestrahlt wird, breitet sich, wie schon erwähnt, parallel zur Schauerachse aus. Sein Abbild gibt die Schauerneigung wieder und liegt auf der Längsachse der Ellipse.
Durch Überlagerung der Kamerabilder und Bestimmung des Schnittpunktes der Achsen erhält man die Schauerrichtung. Bei mehr als 2 Teleskopen werden die Achsen paarweise geschnitten und das Ergebnis gemittelt, wobei eine Wichtung mit $\sin|\gamma|$ vorgenommen wird (siehe [10], [6]). γ bezeichnet den Schnittwinkel der Schauerachsen (siehe Abbildung 3.3 a)).
Mit dieser Methode erhält man eine Richtungsauflösung von $0.1°$. Es wurde die folgende Definition der Auflösung verwendet:

An die quadratischen Abweichung $\Theta^2 = ((\Theta_{x,rek} - \Theta_{x,wahr})^2 + (\Theta_{y,rek} - \Theta_{y,wahr})^2)$ der rekonstruierten von der wahren Schauerrichtung wird eine Funktion der Form $p_1/(2 \cdot p_2^2) \cdot \exp(-0.5 \cdot \Theta^2/p_2^2)$ angepaßt. p_2 ist der hier angegebenen Wert der projizierten Richtungsauflösung. Zur Definition der Auflösung siehe auch (6).

3.3 Rekonstruktion des Schauerauftreffpunktes

Die Längsachsen der Schauerprofile zeigen in Richtung Schauerauftreffpunkt. In dem vereinfachten Fall, daß alle Teleskope zum Zenit ausgerichtet sind und sich in einer Ebene befinden, erhält man den Schauerauftreffpunkt als Schnittpunkt der Längsachsen im gemeinsamen Referenzkoordinatensystem (siehe Abbildung refrekoordinaten b)). Für alle anderen Fälle wird die Berechnung komplizierter und ist bei [6] nachzulesen. Die Schauerauftreffpunktsauflösung beträgt $15\,m$.

3.4 Energierekonstruktion

Aus Monte Carlo Daten werden die Funktionen $< size(R, E, \Theta) >$ und $\sigma_{size}(R, E, \Theta) \equiv (size(R, E, \Theta) - < size(R, E, \Theta) >)^2$ bestimmt. Die Funktion size beschreibt hierbei die Gesamtphotoelektronenzahl je Kamera. Sind size, der Schauerauftreffpunkt R relativ zu jedem Teleskop und der Zenitwinkel Θ bekannt, so erhält man die Energie durch numerische Invertierung der Funktion $< size(R, E, \Theta) >$ (siehe [9]).

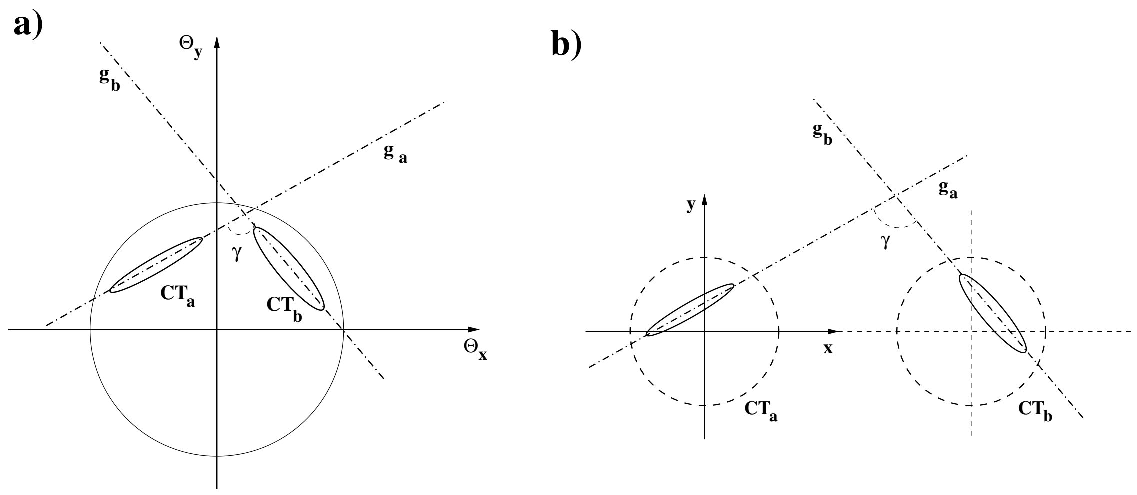


Abbildung 3.3: *Dargestellt sind a) das Prinzip der Schauerrichtungsrekonstruktion und b) das Prinzip der Rekonstruktion des Schauerauftreffpunktes.*

Kapitel 4

Schauerrekonstruktion durch Modellanpassung (Fit)

Bei der konventionellen geometrischen Rekonstruktion (siehe Kapitel 2.2 und 3) werden die Schauerprofile durch eine Ellipse angenähert, d.h es wird eine symmetrische Intensitätsverteilung bezüglich der Ellipsenachsen unterstellt. Die Intensitätsverteilung längst der langen Hauptachse ist in Wirklichkeit asymmetrisch. Der darin liegende Informationsgehalt geht bei der geometrischen Rekonstruktion verloren. Bei der in den folgenden Kapiteln beschriebenen Methode wird ein theoretisch berechnetes Schauerprofil durch Variation seiner Parameter an das gemessene Profil angepaßt. Dies geschieht durch Minimierung einer geeigneten χ^2-Funktion. Das absolute Minimum dieser Funktion bestimmt die Schauerparameter.
Diese Methode der Schauerrekonstruktion durch Modellanpassung wird im folgenden kurz Fit genannt.

4.1 Modellierung des Cherenkov Lichtbildes in der Kamera

Die Fitmethode setzt voraus, daß eine Parametrisierung des Cherenkov Lichtbildes in der Kamera vorliegt, die die Entwicklung der Schauer in der Atmosphäre beschreibt und mit den Abbildern in der Kamera verknüpft. Ein solches Modell wurde von M. Ullrich ([6], [7]) auf Basis von Monte Carlo Simulationen von γ-Schauern gewonnen. Dieses Modell liegt den hier geschilderten Untersuchungen zur Fitmethode zugrunde.

Für die Beschreibung von Schauern sind die folgenden Parameter relevant:

1. der Abstand R zwischen Teleskop und Schauerauftreffpunkt

2. der Zenitwinkel Θ

3. die Energie E und die Höhe des Schauermaximums h_{max}

Die Orientierung der Schauerachse im Raum kann durch Translationen und Rotationen der Schauerabbilder in der Bildebene berücksichtigt werden. Das erleichtert die Simulation der Schauerabbilder, da man sich zunächst auf den Fall beschränken kann, in dem Schauerachse und optische Achse parallel zu einander stehen. Die Neigung wird später durch geeignete Transformation berücksichtigt. Bei der folgenden Diskussion wird das Fitkoordinatensystem zugrunde gelegt und Parallelität von Schauerachse und optischer Achse unterstellt.
Wichtig für das Verständnis des verwendeten Modells ist die Tatsache, daß sich die Photoelektronenintensität, gegeben durch die Funktion $\rho(x_{fit}, y_{fit}|E, R, \Theta)$, in ein Longitudinales und ein Transversales Profil faktorisieren läßt (siehe [6],[7]):

$$\rho(x_{fit}, y_{fit}) = \rho_l(x_{fit})\rho_t(y_{fit}|x_{fit}) \tag{4.1}$$

mit

$$\int \rho_t(y_{fit}|x_{fit})dy_{fit} = 1$$

4.1.1 Simulation der Schauerbilder

Die hier verwendeten Monte Carlo Simulationen von γ-Schauern wurden von A. Plyasheshnikov [11] und A. Konopelko [12] entwickelt. Sie beinhalten die Schauerentwicklung, die Emission von Cherenkov Licht in der Atmosphäre sowie die Simulation der Teleskope.
Der Verlauf der atmosphärischen Dichte ist für die Entwicklung des Schauers und für die Emission des Cherenkov Lichtes von Bedeutung. Das Programm greift auf tabellierte Werte zurück, diese können durch die Funktion $p = 1030\,[g/cm^2]\exp(-h/7.1km)$ beschrieben werden.

Simulation der elektromagnetischen Schauer

Die Simulation der elektromagnetischen Schauer berücksichtigt die folgenden Wechselwirkungsprozesse:

1. Paarbildung, Comptonstreuung und Photoeffekt der γ-Quanten

2. Bremsstrahlung, Annihilation, Ionisation und Vielfachstreuung der Elektronen und Positronen

Der rechenintensivste Teil ist die Berechnung der Vielfachstreuung, der deshalb folgendermaßen behandelt wird:
Jedem Teilchen (Elektron bzw. Positron), das einem Streuprozeß unterliegt, wird ein Trajektorienabschnitt der Form $\Delta X = 0.2E/[MeV]1g/cm^2$ mit einer oberen Grenze von $\Delta X = 5g/cm^2$ zugewiesen. Die Richtung sowie der Energieverlust des Teilchens werden unter Berücksichtigung der Lateral- und Winkelverteilung der Schauerteilchen gewürfelt. Die Verteilungen stammen aus Theorien von Landau-Vavilov und Moliere, die in der Literatur ausführlich beschrieben sind. Mit diesen Verfahren wird die Bahn eines Teilchens simuliert, bis seine Energie unterhalb der Cherenkov Schwellenergie ($21\,MeV$) liegt. Alle sonstigen Wechselwirkumgsprozesse werden innerhalb des jeweiligen Trajektorienabschnitts berechnet und berücksichtigt. Entsteht hierbei ein neues Teilchen, so wird auf dieses das soeben beschriebene Verfahren erneut angewandt.

Simulation des Cherenkov Lichtes

Wie bereits gesagt, wird die Cherenkov Licht Emission von Elektronen und Positronen solange simuliert, wie diese Energien oberhalb der Schwellenergie aufweisen. Nach Gleichung 1.30 wird zunächst die Anzahl der emittierten Photonen im Wellenlängenbereich $300\,nm - 600\,nm$ berechnet. Dann wird vereinfachend angenommen, daß die Emission in der Mitte des Trajektorienabschnittes erfolgt, und das Cherenkov Licht annähernd auf einem Kreis mit Radius r_C auf den Boden auftrifft (siehe Abbildung 4.1).

Die mittlere Anzahl der Photoelektronen $\Delta N_{ph.e}$ bzw. der Cherenkov-Photonen ΔN_{ph}, die am Boden ankommen, ist gegeben durch:

$$\Delta\overline{N_{ph}} = \frac{\overline{BC}}{2\pi r_C}(1-p)\,\overline{N_{ph}} \tag{4.2}$$

$$\Delta\overline{N_{ph.e}} = \tau\Delta\overline{N_{ph}} \tag{4.3}$$

p ist die mittlere Wahrscheinlichkeit für den Verlust eines Photons, τ ist die mittlere Nachweiswahrscheinlichkeit. $\overline{BC}$ ist die Länge des Kreissegments, das den Spiegel trifft.

Simulation der Teleskope

Die Simulation der Teleskope berücksichtigt Verluste von Cherenkov-Photonen, die durch die Spiegelreflektivität, die Quanteneffizienz der Photokathoden in den Photomultipliern und durch die Reflektivität der Lichttrichter verursacht werden.

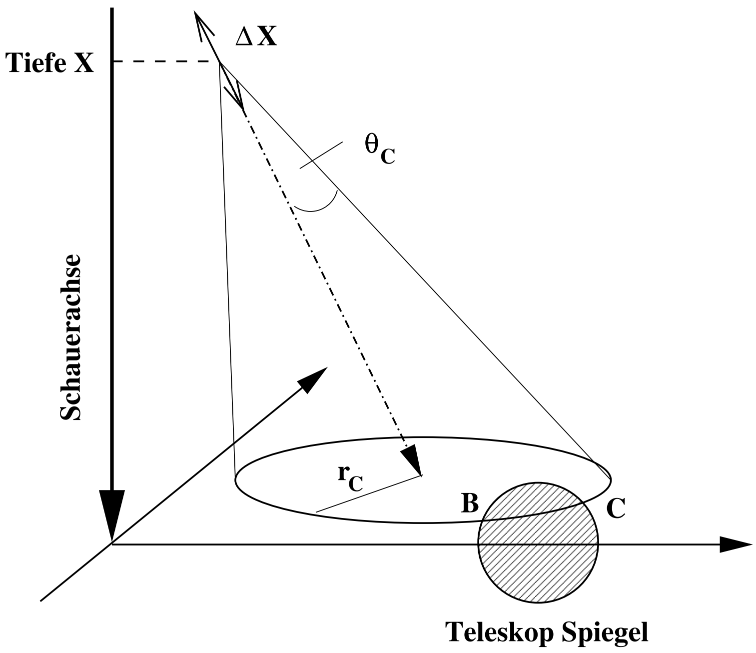


Abbildung 4.1: *Geometrie zur Simulation der Cherenkov-Photonen*

Für weitere Informationen siehe [6].

4.1.2 Das Longitudinale Profil

Das Longitudinale Profil wird durch Projektion des zweidimensionalen Cherenkovbildes auf die x_{fit}-Achse erzeugt. Es beschreibt die Entwicklung des Schauers in der Atmosphäre entlang der Schauerachse (siehe Kapitel 2.1.1) und ist deshalb stark von der Lage des Schauermaximums abhängig. Nach Gleichung 2.2 gilt $x_{fit} \approx R/h$. Analog zum Einfluß der Fluktuation auf den Emissionwinkel ergibt sich (siehe [6], [7]):

$$x'_{fit} \approx \frac{R}{h} \approx \frac{R}{h_1} - \frac{R}{h_1^2}\Delta h = x_{fit}\Big(1 - \frac{\Delta h}{h_1}\Big) \tag{4.4}$$

ausgedrückt durch die atmosphärische Tiefe X:

$$x'_{fit} = -\frac{R}{h_0 \ln \frac{X}{X_{N.N.}}} = x_{fit}\ \underbrace{\left(1 - \left[\frac{X_{max}}{X_{N.N.}}\right]^{-1} \frac{\Delta X}{X_{max}}\right)}_{q} \tag{4.5}$$

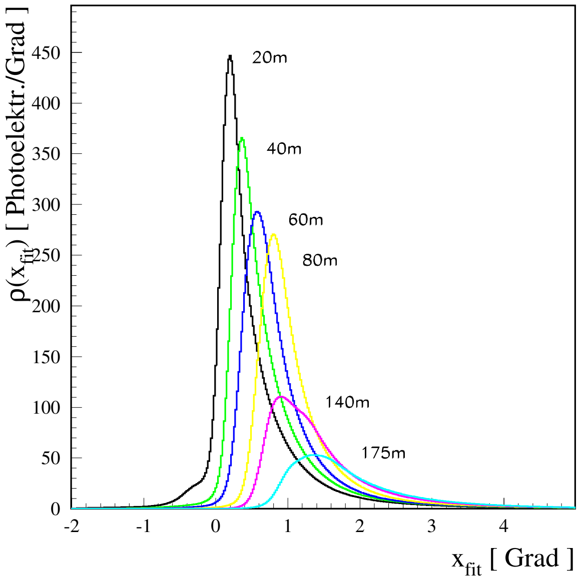


Abbildung 4.2: *Longitudinales Profil für* $1\,TeV$ γ*-Schauer bei unterschiedlichen Schauerabständen* R = *20, 40, 60, 80, 140, 175m.*

In Abbildung 4.2 ist das Longitudinale Profil bei unterschiedlichen Schauerabständen gezeigt. Die Form ist asymetrisch. Der steile Anstieg am Anfang gehört zu der Cherenkov-Lichtemission im Bereich oberhalb des Schauermaximums. In der Nähe des Maximums wird ca. 50% des Cherenkov-Lichtes abgestrahlt. Beispielsweise wird bei einen $1\,TeV$ Schauer die Hälfte des Lichtes in einer Höhe von $4 - 8\,km$ emittiert mit einem Schauermaximum bei ca. $6.5\,km$. Der Abfall hinter dem Maximum verläuft entsprechend flacher.

4.1.3 Das Transversale Profil

Das Transversale Profil wird durch Querschnitte parallel zur y_{fit}Achse erhalten. Es stellt ein Maß für die, bis zu einer bestimmten Atmosphärischen Tiefe aufgetretenen Streuprozesse dar (siehe Kapitel 2.1.1). Für kleine Werte von x_{fit}, die zu großen Höhen gehören, erhält man deshalb sehr schmale Bilder. Größere x_{fit}-Werte liefern

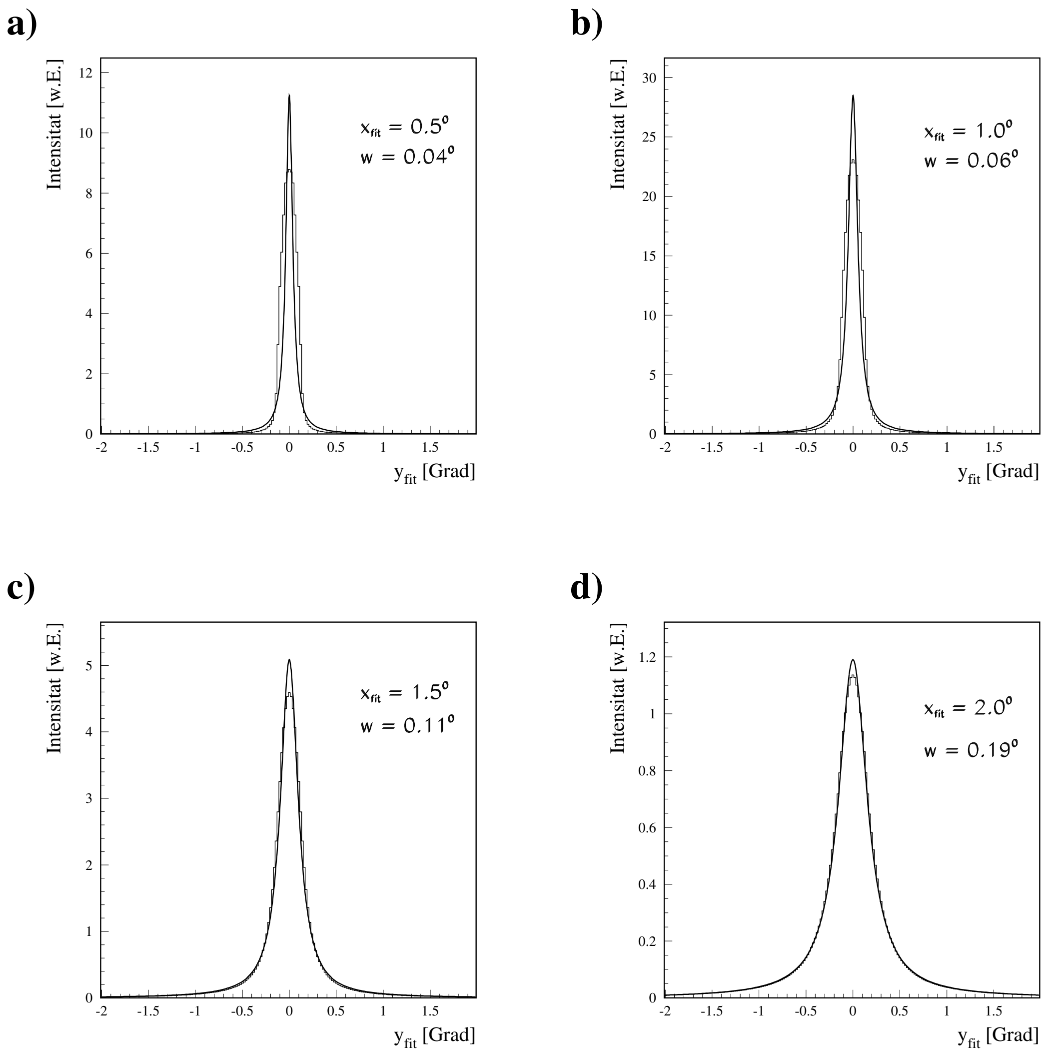


Abbildung 4.3: *Dargestellt sind die Schnitte eines Cherenkov Lichtbildes in 100 m Schauerabstand in transversale Richtung bei vier verschiedenen longitudinalen Positionen. An die jeweiligen transversalen Intensitätsverteilung wurde die Funktion 4.6 angepaßt.*

dagegen breitere Abbilder (siehe [6], [7]).

Das Transversale Profil kann durch folgende Funktion dargestellt werden:

$$\rho(y_{fit}|x_{fit}, R) = \frac{1}{\pi} \frac{w(x_{fit}, R)}{y_{fit}^2 + w(x_{fit}, R)^2} \tag{4.6}$$

Die Breite des Profils ist durch $w(x_{fit}, R)$ gegeben (siehe [6], [7]). In Abbildung 4.3 sind für vier verschiedene longitudinale Positionen transversale Schnitte eines Schauers mit einem Schauerabstand von $100\,m$ gezeigt.

4.1.4 Berechnung der Pixelamplitude

Mit Hilfe des longitudinalen und transversalen Anteils läßt sich die Intensität ρ des Cherenkov-Lichtes in Einheiten von $Photoelektronen/Grad^2$ angeben.

$$\rho(x_{fit}, y_{fit}, E, R) = \frac{E}{1\,TeV}\rho_l(x_{fit}, R)\,\frac{1}{\pi}\frac{w(x_{fit}, R)}{y_{fit}^2 + w(x_{fit}, R)^2} \tag{4.7}$$

Dabei stellt $\rho_l(x_{fit}, R)$ die longitudinale Verteilung für die Energie von $1\,TeV$ dar. Es wird eine lineare Energieabhängigkeit angenommen.

Um die Pixelamplitude in jedem einzelnen Pixel zu erhalten, müßte über die hexagonale Pixelflächen integriert werden. Zur Vereinfachung wird diese schwierige Integration durch die Integration über Kreisflächen mit gleichem Flächeninhalt ersetzt. Eine partielle Integration läßt sich in transversaler Richtung ausführen. In longitudinaler Richtung wird eine Chebyshev-Integration mit 7 Stützpunkten durchgeführt. (siehe [6], [7]).

Sei (x_0, y_0) der Pixelmittelpunkt, so gilt

$$\begin{aligned} A(x_0, y_0) &= \frac{E}{1TeV}\int_{x_0-r}^{x_o+r} dx \int_{y_0-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}^{y_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}} dy\; \rho(x,y) = \\ & \frac{E}{1TeV} r \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} dx\; \rho_l(x_o + rx)\left[\arctan\frac{y}{w(x_0+rx)}\right]_{y=y_0-r\sqrt{1-x^2}}^{y=y_0+r\sqrt{1-x^2}} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Diese Integration ist sehr zeit- und rechenaufwendig. Um Rechenzeit zu sparen, wird dieser Rechenschritt nur einmal durchgeführt und die Pixelamplituden in einer Tabelle in Abhängigkeit vom Schauerabstand und der Pixelmittelpunktskoordinate im Fitkoordinatensystem gespeichert. In x- und y-Richtung beträgt der Abstand zwischen den einzelnen Stützpunkten 0.02°, für den Schauerabstand bis 175m 5m, danach je 25m. Die Berechnung der Pixelamplitude eines Pixels an einer bestimmten Stelle (x, y) erfolgt durch Lineare Interpolation zwischen den abgespeicherten Werten.
Hierdurch ist eine Verminderung der Rechenzeit um einen Faktor 4 erfolgt.

4.1.5 Berechnung der Pixelamplitude durch Lineare Interpolation

Zur linearen Interpolation zwischen den gespeicherten Werten der Pixelamplitude dient eine Funktion der Form:

$$f(x_{fit}, y_{fit}, R) = a\,x'_{fit} + b\,y_{fit} + c\,R + d\,x'_{fit}\,y_{fit} + e\,x'_{fit}\,R + f\,y_{fit}\,R + g\,x'_{fit}\,y_{fit}\,R + h$$

Es ist zu beachten, daß sich die x_{fit}-Koordinate nach Gleichung 4.5 bei einer Verschiebung des Schauermaximums verändert. Es gilt $x'_{fit} = 1/q\,x_{fit}$. Der Pixelmittelpunkt wird also um einen Faktor 1/q verändert.
Die Berechnung der Koeffizienten a,b,c,d,e,f,g und h ist im Anhang A nachzulesen.

4.2 Durchführung des Fits

Die Schauerparameter Schauerneigung (Θ_x, Θ_y), Schauerauftreffpunkt (R_x, R_y), Energie E und Schauerhöhe werden durch Minimierung einer χ^2-Funktion berechnet. Die Schauerhöhe wird durch den in Gleichung 4.5 eingeführten q-Faktor berücksichtigt. Die χ^2-Funktion hat folgende Form:

$$\chi^2(R_x, R_y, \Theta_x, \Theta_y, E, q) = \sum_{i,t} \frac{(1/q\,A^{theo}_{i,t}\ (x_{i,t}, y_{i,t}, R, E) - A^{mes}_{i,t}(x_{i,t}, y_{i,t}, R, E))^2}{\sigma^2_{i,t}} \tag{4.9}$$

Summiert wird über Pixel i und Teleskope t.
$A^{theo}_i(x_{i,t}, y_{i,t}, R, E)$ stellt die theoretisch berechnete Pixelamplitude (siehe Kapitel 4.1.5), $A^{mes}_i(x_{i,t}, y_{i,t}, R, E)$ die gemessene Amplitude und $\sigma_{i,t}$ die Wichtung dar. Letztere ist für das Gelingen der Minimierung von entscheidender Bedeutung. In $A^{theo}_{i,t}$ geht die Asymmetrie des Profils ein.

4.2.1 Wichtung der χ^2-Funktion

Die Wichtung beeinflußt den Verlauf der χ^2-Funktion. Zur erfolgreichen Minimierung muß sie ein ausgeprägtes absolutes Minimum und möglichst keine Nebenminima besitzen. Um $\sigma_{i,t}$ zu optimieren, wurden verschiedene Möglichkeiten untersucht. Dabei wurde immer die Annahme gemacht, daß die Pixelamplitude um den vorhergesagten Wert normalverteilt ist. Unter dieser Vorraussetzung stellt $\sigma_{i,t}$ die Fluktuation bzw. Varianz der Amplitude dar. Diese Fluktuation setzt sich aus drei Teilen zusammen: dem Amplitudenrauschen, dem Rauschen der Verstärkung am Photomultiplier und dem Nachthimmelhintergrundlicht.

$$\sigma_{i,t}^2 = \sigma_{Amp}^2 + \sigma_{PMT}^2 + \sigma_{NSB}^2 \tag{4.10}$$

Amplitudenrauschen

σ_{Amp} beschreibt die Fluktuation des Schauers und ist proportional zur Gesamtamplitude des Bildes. Das Amplitudenrauschen ist abhängig von der Energie und vom Schauerauftreffpunkt. Zur Einfachheit wird von einer Poissonverteilung ausgegangen, deren Breite den Wert für σ_{Amp} liefert. In Wirklichkeit ist die Breite der Verteilung größer.

Verstärkung des Photomultipliers

Man kann annehmen, daß die Vervielfachung der Elektronen an jeder Dynode näherungsweise einer Poissonstatistik unterliegt. Das resultierende Signal nach vielen Dynoden kann als normalverteilt mit einer empirisch ermittelten relativen Breite von $\Delta N/N \approx 0.5\sqrt{N}$ angenommen werden. N ist die Anzahl der Elektronen, die auf die erste Dynode treffen (siehe [6]).

Nachthimmelshintergrundlicht

σ_{NSB} berücksichtigt den Photonenfluß des Nachthimmels. Dieser Beitrag des Rauschens wird auf 1.3 Photoelektronen ($ph.e$) gesetzt.
Befinden sich einzelne Sterne im Gesichtsfeld, so müssen diese gesondert behandelt werden (siehe [6]).

Insgesamt ergibt sich eine Wichtung der Form:

$$\sigma_{i,t}^2 = 1.5\, A_{i,t} + (1,3\, ph.e)^2 \tag{4.11}$$

Diese Gleichung liegt allen, in den folgenden Abschnitten untersuchten Wichtungen, zu Grunde. Die Unterschiede betreffen die Wahl der Pixelamplitude $A_{i,t}$ bezüglich der die Fluktuation berücksichtigt wird. Es ergeben sich drei Möglichkeiten: die Meßamplitude, der Mittelwert aus gemessener und theoretischer Amplitude sowie die theoretische Amplitude.

Wichtung auf der Basis der Meßamplitude

Diese Wichtung wurde von M. Ullrich in seiner Doktorarbeit verwendet [6]. Sie lautet:

$$\sigma_{i,t}^2 = 1.5\,A_{i,t}^{mes} + (1,3\,ph.e)^2 \tag{4.12}$$

Zur Überprüfung des Verlaufs der Funktion wurde das Abbild eines wohldefinierten Schauers mit bekannten Schauerparametern generiert. Für diesen wurde dann χ^2 in Abhängigkeit von jeweils 2 Parametern berechnet, die restlichen wurden fest auf die theoretischen Werte gesetzt und festgehalten.

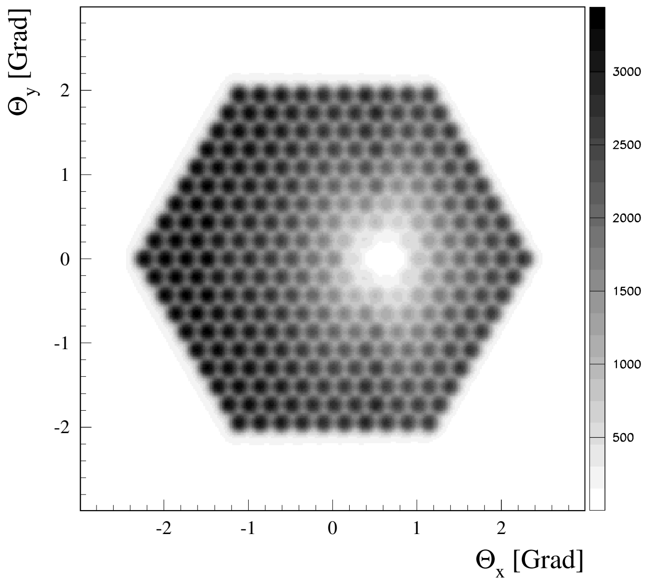


Abbildung 4.4: *Dargestellt ist der Verlauf der χ^2 Funktion mit Wichtung nach Gleichung 4.12 eines Schauers mit Schauerabstand (0 m, 0 m), der Energie $1\,TeV$ und $(0.6°, 0.0°)$ Schauerneigung. Die Schauerneigung wurde jeweils um $0.02°$ Schritten in x- und y-Richtung variiert, die restlichen Schauerparameter wurden auf den wirklichen Wert gesetzt und festgehalten.*

Abbildung 4.4 zeigt den Verlauf der χ^2-Funktion eines Schauers mit folgenden vorgegebenen Parametern: der Energie $1\,TeV$, der Schauerneigung $(0.6°, 0°)$, dem Schauerabstand $(0\,m, 0\,m)$ und einer Höhe des Schauermaximums von $6.5\,km$ über N.N.

Die Funktion wurde in Abhängigkeit von der Schauerneigung aufgetragen. Diese wurde in x- und y-Richtung in $0.02°$-Schritten im Intervall von $-3°$ bis $3°$ variiert. χ^2 weist ein absolutes Minimum bei $(0.6°, 0°)$ auf. Ausgehend von diesem Minimum steigt ihr Funktionswert kontinuierlich an, um ein Maximum zu erreichen und anschließend wieder abzufallen.
Auffällig sind die periodischen Schwankungen, die ein Abbild der Pixel in der Kamera wiedergeben. Abbildung 4.5, ein Schnitt entlang der Θ_x-Achse bei $0°$ Schauerneigung in y-Richtung, zeigt diesen Sachverhalt deutlich. Bei einer Variation der Schauerneigung um $0.25° \cdot (2n+1)/2$ tritt ein Minimum, bei Variation um $0.25° \cdot n$ tritt ein Maximum auf. Dies entspricht einer Verschiebung um einen halben bzw. einem ganzen Pixeldurchmesser. Ursächlich hierfür ist das Verhalten der Funktion $\sum_{i,t}(A_i^{theo})^2$, wie Abbildung 4.2.1 verdeutlicht.
Dieser Effekt beruht darauf, daß das Maximum des Bildes eines γ-Schauers nur auf wenige Pixel verteilt ist und daher die Pixelamplitude stark von der Lage des Profils in der Kamera abhängt. Man spricht vom sogenannten Digitalisierungseffekt der Kamera.
Anhand eines Beispiels, dem vereinfachten Fall eines Schauerprofils, der Breite eines Pixels und der Gesamtintensität von 20 (in willkürlichen Einheiten), soll dieser Effekt verdeutlicht werden.
Es sei zuerst die gesamte Intensität in einem Pixel enthalten (siehe Abbildung 4.6 a)), dann liefert die Summe über die Amplitudenquadrate den Wert:

$$\sum_i (A_i^{theo})^2 = 20^2 = 400$$

Dies würde einem Schauerprofil mit Maximum im Pixelmittelpunkt entsprechen. Verschiebt man nun das Profil um ein halbes Pixel, dies kann z.B. durch Variation der Schauerneigung um $0.125°$ in x-Richtung hervorgerufen werden, so erhält man zwei Pixel mit gleicher Amplitude (siehe Abbildung 4.6 b)). Es ergibt sich für die Summe der Wert:

$$\sum_i (A_i^{theo})^2 = 2 \cdot 10^2 = 200$$

Immer, wenn das Maximum zwischen 2 Pixeln liegt, erhält man ein Minimum, und wenn das Maximums in der Mitte eines Pixels zu liegen kommt, ein Maximum.

Der starke Einfluß von $\sum_i (A_i^{theo})^2$ auf den Verlauf der χ^2-Funktion wird nach folgender Umformung deutlich.

$$\chi^2 = \underbrace{\sum_{i,t} \frac{(1/q\, A_{i,t}^{theo})^2}{\sigma_{i,t}^2}}_{1} - \underbrace{\frac{2 \cdot 1/q\, A_{i,t}^{theo}\, A_{i,t}^{mes}}{\sigma_{i,t}^2}}_{2} + \underbrace{\frac{(A_{i,t}^{mes})^2}{\sigma_{i,t}^2}}_{3} \tag{4.13}$$

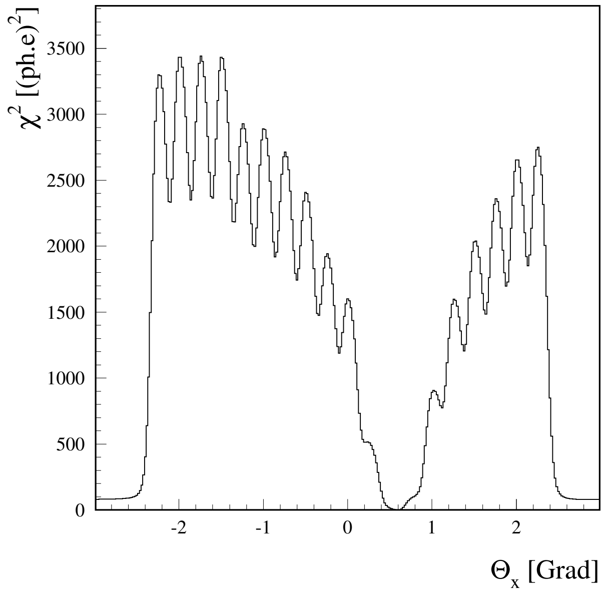
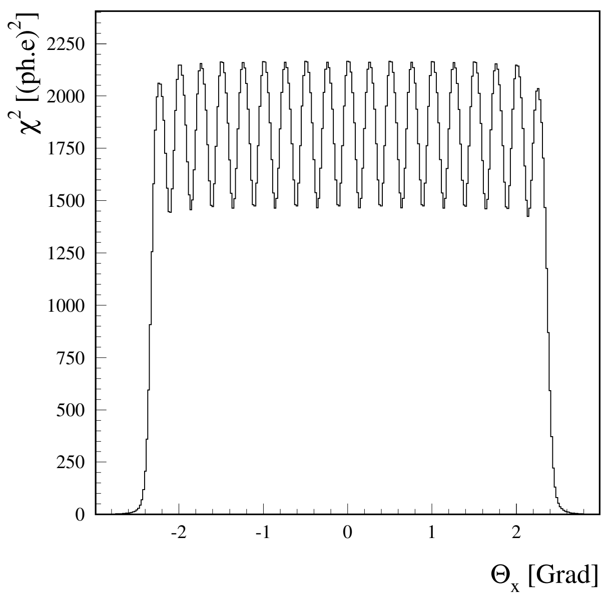


Abbildung 4.5: *Dargestellt ist ein entlang der Θ_x-Achse verlaufender Schnitt der χ^2 Funktion mit Wichtung nach Gleichung 4.12 für einen Schauer mit dem Schauerabstand ($0\,m, 0\,m$), der Energie $1\,TeV$ und der Schauerneigung ($0.6°, 0°$) bei $\Theta_y = 0°$.*

Teil 1 der Funktion bewirkt das periodische Schwanken. Betrachtet man Abbildung 4.5 erneut, fällt auf, daß die erwarteten Minima bei $\pm 0.125°$ (1/2 Pixeldurchmesser) um das absolute Minimum nur andeutungsweise zu erkennen sind und ausgeprägte Nebenminima erst bei einer Variation der Schauerneigung um ein bis zwei Pixeldurchmesser auftreten. Dies ist ein Effekt der Wichtung nach Formel 4.12. In der Nähe der wirklichen Schauerparameter, d.h. dem absoluten Minimum, ist $A_{i,t}^{mes}$ und damit $\sigma_{i,t}$ groß. Dies hat zur Folge, daß die periodischen Schwankungen in diesem Bereich weitgehend unterdrückt werden. Der Schwankungseffekt tritt erst deutlich auf, wenn das Maximum des theoretischen Profils außerhalb der Pixel mit hoher Amplitude liegt.

Dieser Effekt wird ebenfalls vermindert, sobald sich der Bereich des Schauerprofilmaximums über mehrere Pixel erstreckt. In Abbildung 4.7 ist der Verlauf der χ^2-Funktion eines Schauers der Energie $1\,TeV$, der Schauerneigung $(0.6°, 0.0°)$ mit einem Schauerauftreffpunkt von $(100\,m, 0\,m)$ dargestellt. Der Bereich des Maximums erstreckt sich in diesem Fall über mehrere Pixel entlang der x-Achse (siehe Abbildung 4.2), in y-Richtung jedoch nur über einen schmalen Bereich, ungefähr dem Durchmesser eines Pixels entsprechend. Die geringere periodische Schwankung im Fall breiter Profile ist anhand von Abbildung 4.8 gut zu erkennen. Hier sind Schnitte



a) entlang der Θ_x-Achse und b) entlang der Θ_y-Achse gezeigt. Wie zu erwarten, sind die Nebenminima im Falle von a) unterdrückt in b) jedoch weiterhin stark ausgeprägt. Da bei dieser Abbildung der Schauerauftreffpunkt auf $(100\,m, 0\,m)$ festgelegt wurde, verschob sich das " Abbild der Kamera ". Das Maximum des Schauerprofils liegt bei $\sim 0.9°$. Eine Variation der Schauerneigung bei festgehaltenen anderen Parametern entspricht einer reinen Verschiebung des Profils in der Kameraebene. Dies bedeutet, daß bei Variation der Schauerneigung in Θ_x-Richtung das Maximum des Profils die Kamera in positiver Θ_x-Richtung früher verläßt als in negativer Richtung. Außer dieser periodischen Struktur zeichnet sich, wie oben erwähnt, der Verlauf

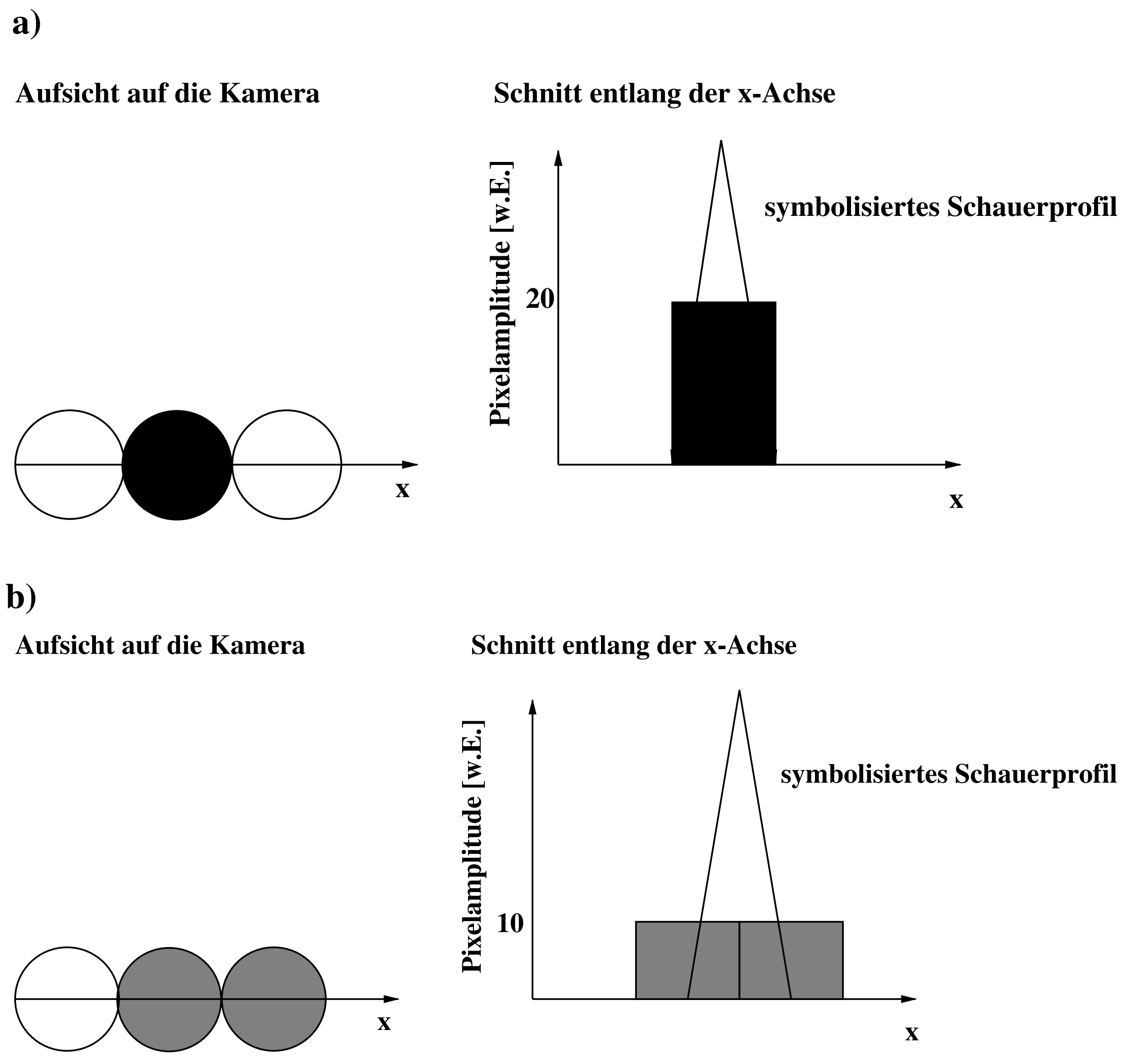


Abbildung 4.6: *Modell des Digitalisierungseffektes*

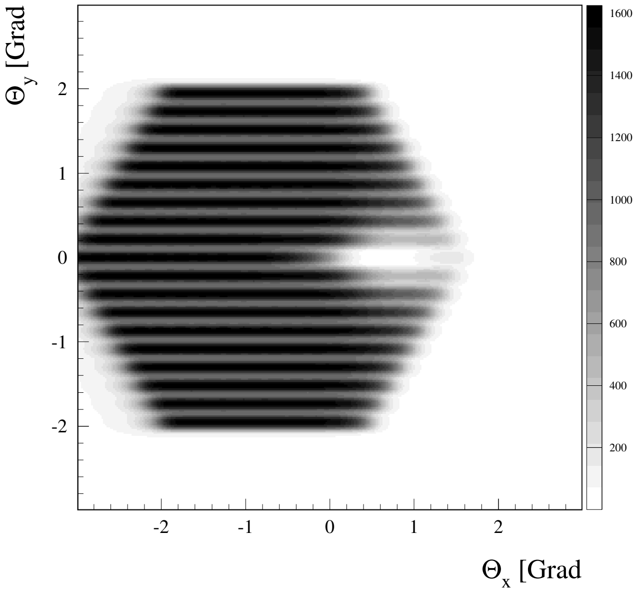


Abbildung 4.7: *Dargestellt ist der Verlauf der χ^2 Funktion mit Wichtung nach Gleichung 4.12 eines Schauers mit Schauerabstand (100 m, 0 m), der Energie 1 TeV und ($0.6°, 0.0°$) Schauerneigung. Die Schauerneigung wurde jeweils um $0.02°$ Schritten in x- und y-Richtung variiert, die restlichen Schauerparameter wurden auf den wirklichen Wert gesetzt und festgehalten.*

durch eine Zunahme des Funktionswertes vom absoluten Minimum ausgehend bis zu einem Maximum aus. Der nachfolgende Abfall ist zunächst überraschend, findet jedoch eine einfache Erklärung in der Tatsache, daß bei steigendem Abstand das theoretische Profil schließlich aus der Kamera herauswandert. Da sich die Summation der χ^2-Funktion nur über die wirklich existenten Pixel erstreckt, liefert das Vergleichsprofil keinen Beitrag mehr, sobald es außerhalb der Kamera liegt.

Abschließend läßt sich feststellen, daß die χ^2-Funktion mit Wichtung nach Gleichung 4.12 ungünstige Eigenschaften hat. Sie ist zur Durchführung der Minimierung ungeeignet.

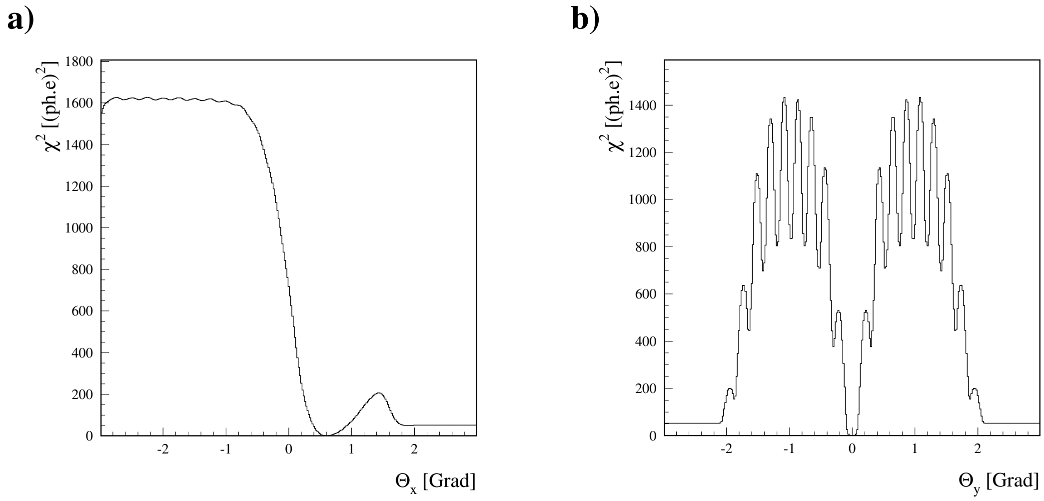


Abbildung 4.8: *Dargestellt ist in a) ein entlang der Θ_x-Achse durch den Punkt $\Theta_y = 0.^\circ$ verlaufender Schnitt der χ^2 Funktion mit Wichtung nach Gleichung 4.12 in b) ein entlang der Θ_y-Achse durch den Punkt $\Theta_x = 0.6^\circ$ verlaufender Schnitt für einen Schauer mit dem Schauerabstand $(100\,m, 0\,m)$, der Energie $1\,TeV$ und der Schauerneigung $(0.6^\circ, 0^\circ)$.*

Wichtung auf Basis des Mittelwertes aus Meßamplitude und theoretischer Amplitude

Die Wichtung lautet in diesem Fall:

$$\sigma_{i,t}^2 = 1.5\,\frac{(A_{i,t}^{mes} + 1/q\,A_{i,t}^{theo})}{2} + (1,3\,ph.e)^2 \tag{4.14}$$

Diese Art der Wichtung wurde bei CAT bereits angewendet [22].

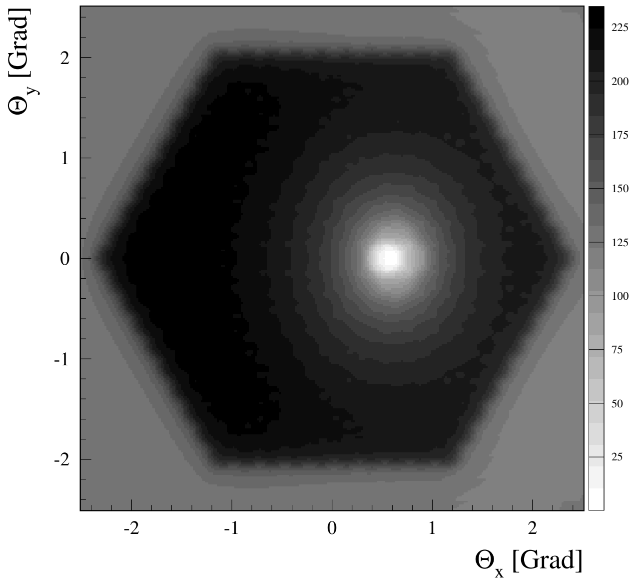


Abbildung 4.9: *χ^2 Funktion mit Wichtung nach Gleichung 4.14 eines Schauers der Energie $1\,TeV$ und der Schauerneigung $(0.6°, 0.0°)$, des Schauerauftreffpunktes $(0\,m, 0\,m)$ und einer Schauerhöhe von $6.5\,km$. Die Schauerneigung wurde in x- und y-Richtung in $0.02°$ variiert. Die restlichen Schauerparameter wurden auf ihren wirklichen Wert gesetzt und festgehalten.*

In Abbildung 4.9 ist der Verlauf der χ^2-Funktion eines Schauers mit den Schauerparametern Energie $1\,TeV$, Schauerneigung $(0.6°, 0.0°)$, Schauerauftreffpunkt $(0\,m, 0\,m)$ und Schauerhöhe $6.5\,km$ mit der neuen Wichtung 4.14 dargestellt. Sie ist in weiten Bereichen um das absolute Minimum glatt, weist jedoch ebenfalls in einem Abstand

von ca $0.6°$ Nebenminima auf. Dies wird in Abbildung 4.10 anhand von Schnitten entlang der Θ_x-Achse gezeigt. Diese Minima sind nicht mehr stark ausgeprägt, da durch die Bildung des Mittelwertes $(A_{i,t}^{mes} + 1/q\, A_{i,t}^{theo})/2$ die Schwankungen der Funktion $\sum_{i,t}(A_{i,t}^{theo})^2$ gemildert werden.
Wie im Falle der Wichtung nach Gleichung 4.12 weist diese χ^2-Funktion einen kontinuierlichen Anstieg vom absoluten Minimum ausgehend bis zu einem Maximum und den danach folgenden Abfall auf.

In Abhängigkeit der Schauerneigung sieht die Funktion vernünftig aus, wenn die Startwerte der Minimierung nicht weiter als $0.5°$ von der wahren Position entfernt liegen.

Zur Überprüfung, ob sich die Funktion auch in Abhängigkeit von den restlichen Schauerparametern sinnvoll verhält, wurde die χ^2-Funktion in Abhängigkeit vom Schauerauftreffpunkt berechnet.
Abbildung 4.11 zeigt den Verlauf der χ^2-Funktion eines Schauers mit folgenden vorgegebenen Parametern: der Energie $1\,TeV$, der Schauerneigung $(0°, 0°)$, dem Schauerabstand $(100\,m, 100\,m)$ und einer Höhe des Schauermaximums von $6.5\,km$ über N.N. Als freie Parameter wurden die Koordinaten des Schauerauftreffpunkts gewählt und in x- und y-Richtung in $1\,m$-Schritten im Intervall von $-200\,m$ bis $200\,m$ variiert. Die restlichen Parameter werden auf ihren wahren Wert gesetzt und festgehalten.

Das Minimum der Funktion liegt bei $(100\,m, 100\,m)$. Vom Minimum ausgehend nimmt der Wert der Funktion zu, um ein Maximum zu erreichen und dann zuerst langsam und später schnell abzufallen. Im Falle der Variation des Schauerabstandes müssen zwei Dinge zur Erklärung berücksichtigt werden. Zum einen wird der Abfall, wie bereits oben diskutiert, durch das Herauswandern des theoretischen Profils aus der Kamera hervorgerufen. Andererseits ist die Pixelamplitude jedoch abhängig vom Schauerabstand. Dies zeigt Abbildung 4.13. Hier ist die Gesamtamplitude $\sum A_i^{theo}$ in Abhängigkeit vom Schauerabstand dargestellt. Dieser Sachverhalt formt den Bereich der χ^2-Funktion in Abbildung 4.12 d) im Bereich zwischen $-50\,m$ und $50\,m$. Geht man vom Minimum aus in Richtung der negativen R_x-Achse bei $R_y = 0\,m$, so nimmt die Gesamtamplitude zunächst zu, bei $R_x = 0\,m$ hat sie ihr Maximum und nimmt dann wiederum ab. Unter Vernachlässigung der Nebenminima und -maxima kann man in Abbildung 4.12 d) ein Maximum bei $R_x = 0\,m$ erkennen. Diese Erklärung vernachlässigt das Zusammenspiel zwischen der Änderung des χ^2-Wertes durch Variation des Schauerauftreffpunktes und die damit verbundene Änderung der Pixelamplitude einerseits und der Änderung der Beiträge der Summanden der χ^2-Funktion auf Grund der Veränderung der Überlappung der Profile andererseits.

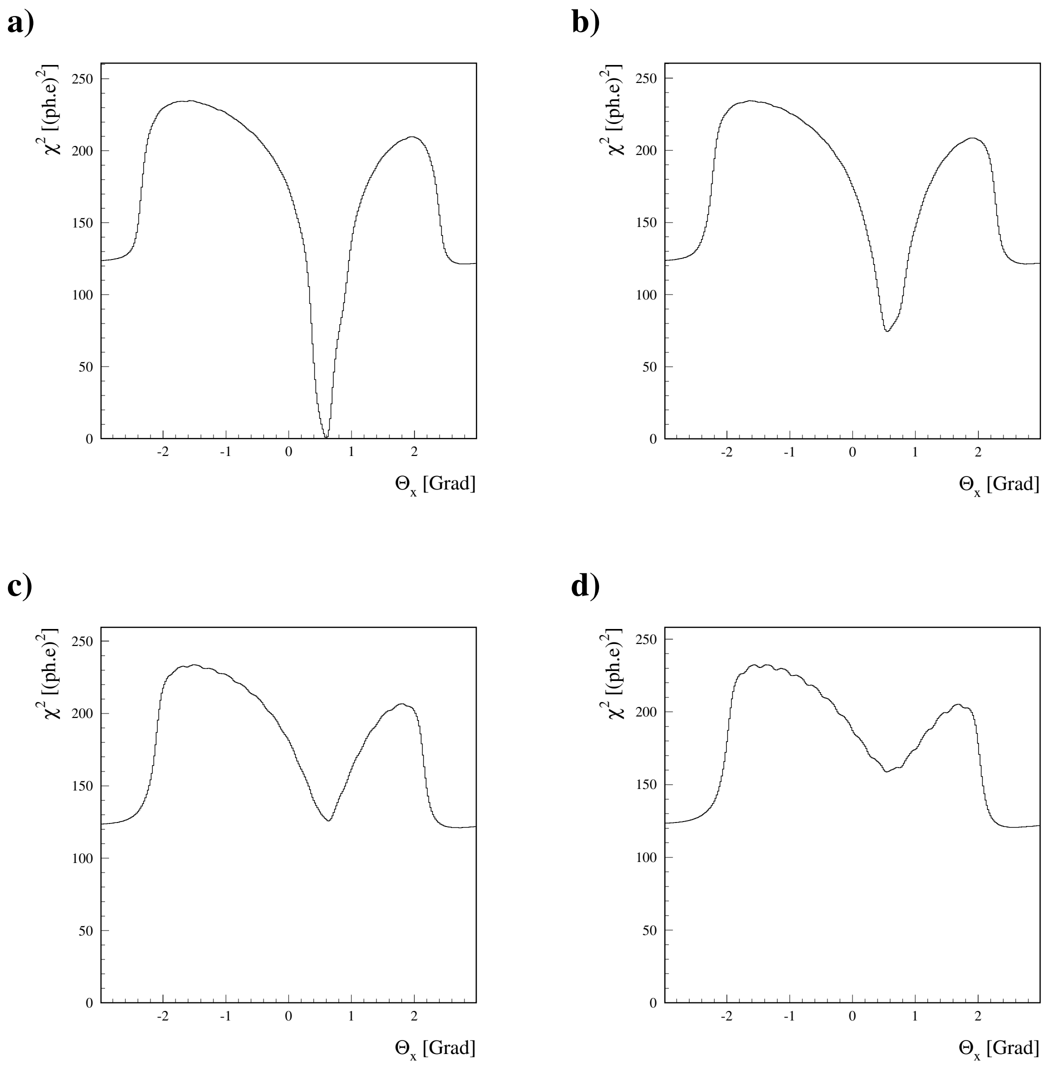


Abbildung 4.10: *Schnitte der χ^2 Funktion mit Wichtung nach Gleichung 4.14 eines Schauers der Energie $1\,TeV$ und der Schauerneigung ($0.6^\circ, 0.0^\circ$), des Schauerauftreffpunktes ($0\,m, 0\,m$) und einer Schauerhöhe von $6.5\,km$ bei a) 0.0° Schauerneigung in y-Richtung b) 0.2° Schauerneigung in y-Richtung c) 0.4° Schauerneigung in y-Richtung und d) 0.6° Schauerneigung in y-Richtung*

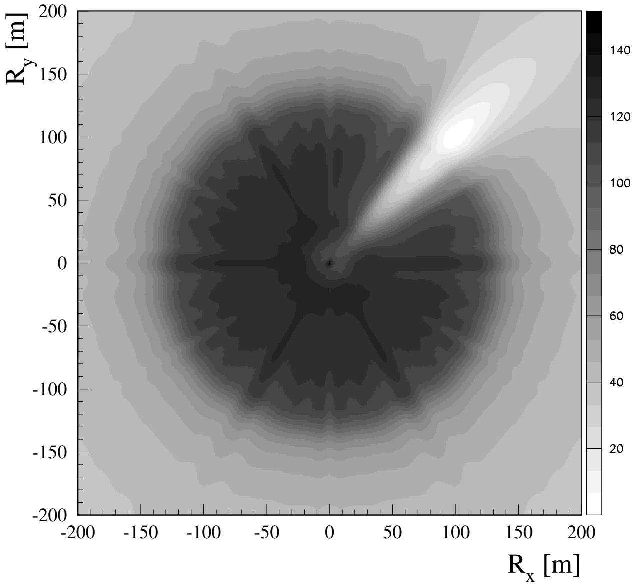


Abbildung 4.11: χ^2 *Funktion der Wichtung nach Gleichung 4.14 eines Schauers mit Schauerabstand in x- und y-Richtung von jeweils* $100\,m$*, der Energie* $1\,TeV$ *und* $0°$ *Schauerneigung in x-Richtung. Es wurde der Schauerauftreffpunkt in* $1\,m$ *Schritten von* $-200\,m$ *bis* $200\,m$ *variiert.*

Die Erklärung ist deshalb nur anwendbar, wenn Meß- und theoretisches Profil getrennt innerhalb der Kamera liegen, wie es bei 4.12 d) der Fall ist. In den anderen Fällen muß der Einfluß der einzelnen Effekte qualitativ abgeschätzt werden, um eine Aussage zu treffen.

Eine weitere wichtige Abhängigkeit der χ^2-Funktion ist die Energieabhängigkeit. In Abbildung 4.15 ist der Verlauf der χ^2-Funktion eines Schauers der Energie $2\,TeV$, des Schauerabstandes $(100\,m, 0\,m)$, der Schauerneigung $(0.6°, 0.0°)$ und der Höhe des Schauermaximums von $6.5\,km$ über N.N. in Anhängigkeit von der x-Koordinate der Schauerneigung und der Energie dargestellt. Um den Verlauf genauer untersuchen zu können, sind in Abbildung 4.16 Schnitte entlang der Θ_x-Achse gezeigt bei Energien von a) $1\,TeV$, b) $2\,TeV$, c) $3\,TeV$ und c) $4\,TeV$. Wie zu erwarten, weist die Funktion bei Schauerneigung $(0.6°, 0.0°)$ und einer Energie von $2\,TeV$ ein Minimum auf (siehe Abbildung 4.16 b)). Der Verlauf ist glatt. Der Abfall bei ca.

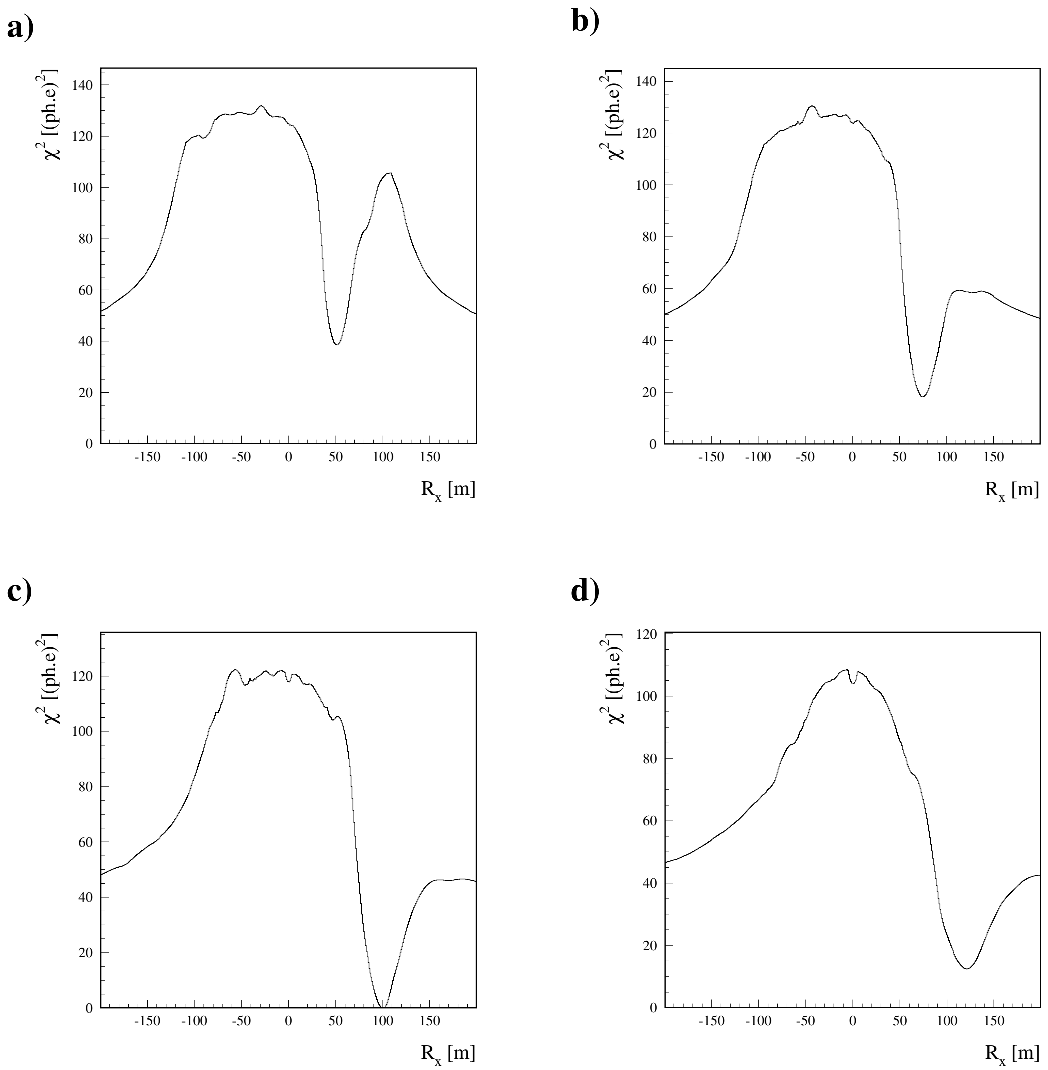


Abbildung 4.12: *Schnitte der χ^2 Funktion der Wichtung nach Gleichung 4.14 eines Schauers mit Schauerabstand in x- und y-Richtung von jeweils $100\,m$, der Energie $1\,TeV$ und $0°$ Schauerneigung in x-Richtung, entlang der R_x-Achse bei a) $R_y = 50\,m$ b) $R_y = 75\,m$, c) $R_y = 100\,m$ und d) $R_y = 125\,m$. Hier wurde der Schauerabstand als freier Parameter gewählt.*

$\sim 1.4°$ wird wiederum durch das Herauswandern des theoretischen Profils aus der Kamera hervorgerufen. (Bei Variationen der Schauerneigung mit festem Schauerabstand und fester Energie bleiben die Pixelamplituden erhalten.) Bei $\sim 1.9°$ ist das

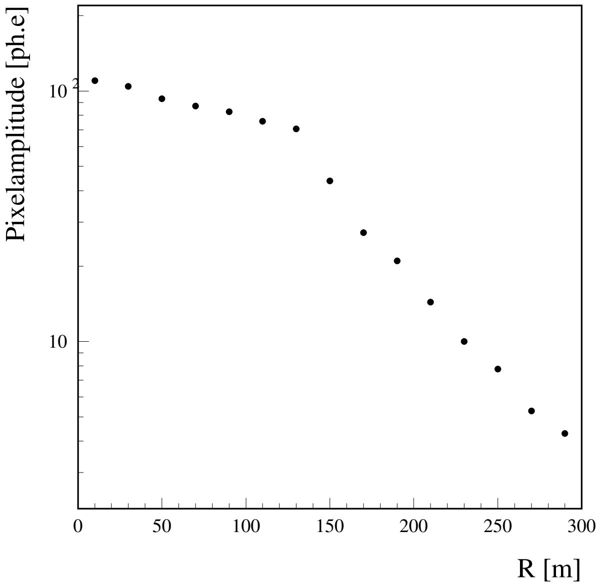


Abbildung 4.13: *Gesamtpixelamplitude $\sum_i A_i^{theo}$ in Abhängigkeit vom Schauerabstand.*

Profil vollständig außerhalb der Kamera. Betrachtet man nun den Verlauf in negativer Θ_x-Richtung, so erfolgt der Abfall erst bei ca. $-3.8°$. Der Grund für diesen verzögerten Abfall liegt in der Asymmetrie den Schauerprofils (siehe Abbildung 4.2).

In Abbildung 4.16 sind Schnitte entlang der Energie-Achse gezeigt bei einer Schauerneigung in x-Richtung Θ_x von a) $0.2°$, b) $0.6°$, c) $0.8°$ und c) $1.°$. Auch hier wird die Energie richtig wiedergefunden.
Die χ^2-Funktion weist einen glatten Verlauf in einem Bereich von ca. $0.5°$ um die wahre Schauerneigung und von ca. $50\,m$ um den wahren Schauerauftreffpunkt auf. Außerhalb dieses Bereiches treten dagegen Nebenminima auf. Dies ist zusammen mit dem Abfall des Funktionswertes störend, da der Fit dadurch stark abhängig von der Wahl der Startwerte wird. Nur innerhalb der Mulde kann eine Minimierung der χ^2-Funktion durchgeführt werden.

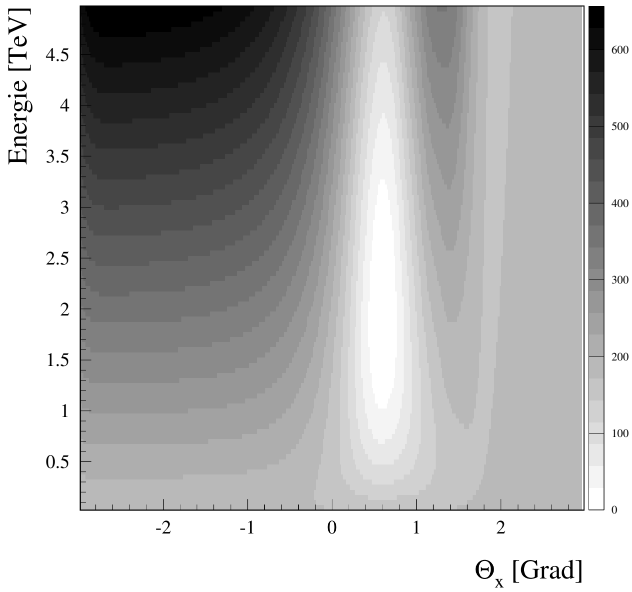


Abbildung 4.14: χ^2 *Funktion mit Wichtung nach Gleichung 4.14 eines Schauers der Energie* $2\,TeV$*, der Schauerneigung* $(0.6^\circ, 0.0^\circ)$*, mit dem Schauerabstand* $(100\,m, 0\,m)$ *und einer Höhe des Schauermaximums von* $6.5\,km$ *über N.N. in Anhängigkeit von den x-Koordinate der Schauerneigung und der Energie. Die restlichen Parameter wurden auf ihren wirklichen Wert gesetzt und festgehalten.*

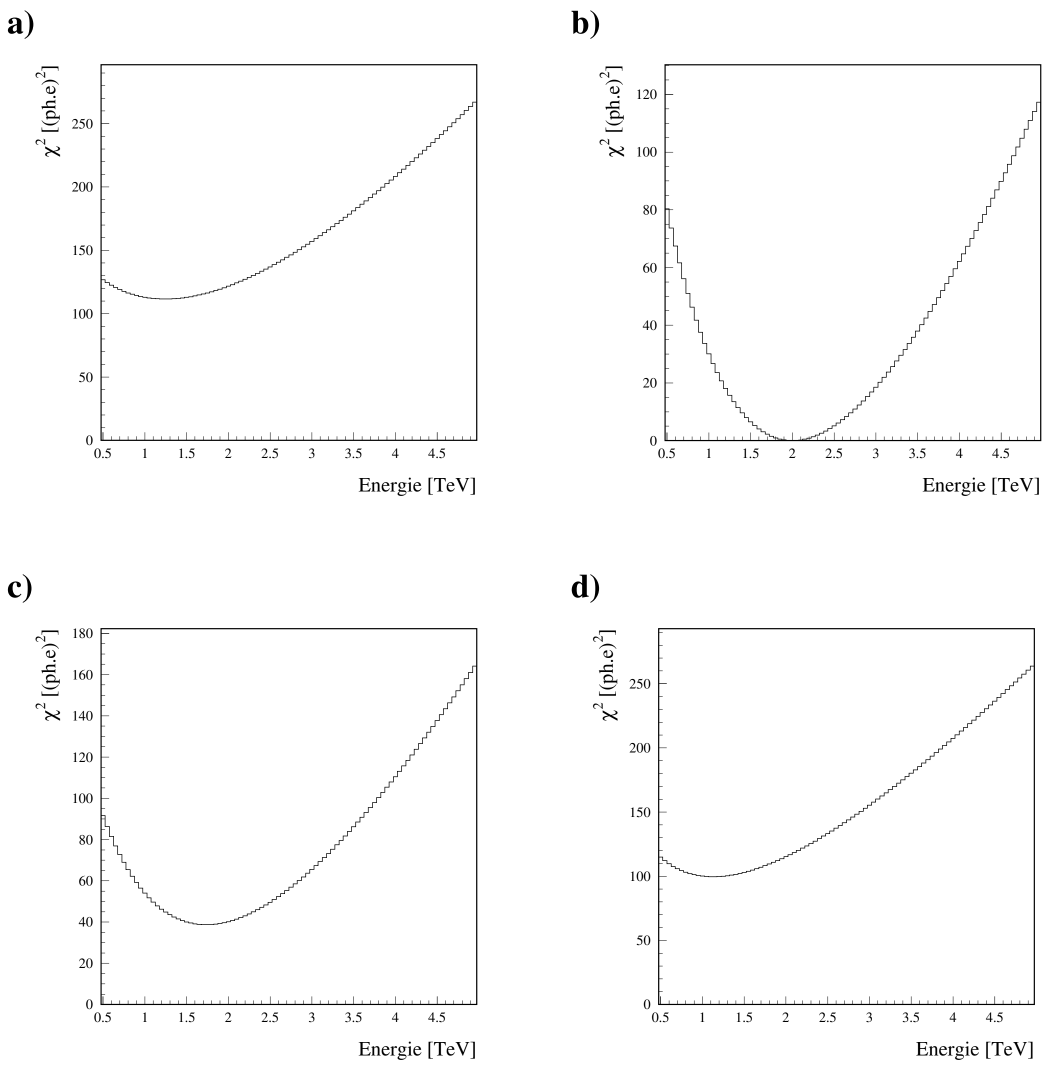


Abbildung 4.15: *Schnitte χ^2 Funktion mit Wichtung nach Gleichung 4.14 eines Schauers der Energie $2\,TeV$, der Schauerneigung $(0.6°, 0.0°)$, dem Schauerabstand $(100\,m, 0\,m)$ und einer Höhe des Schauermaximums von $6.5\,km$ über N.N. entlang der Energie-Achse bei Θ_x von a) $0.2°$, b) $0.6°$, c) $0.8°$ und c) $1.°$.*

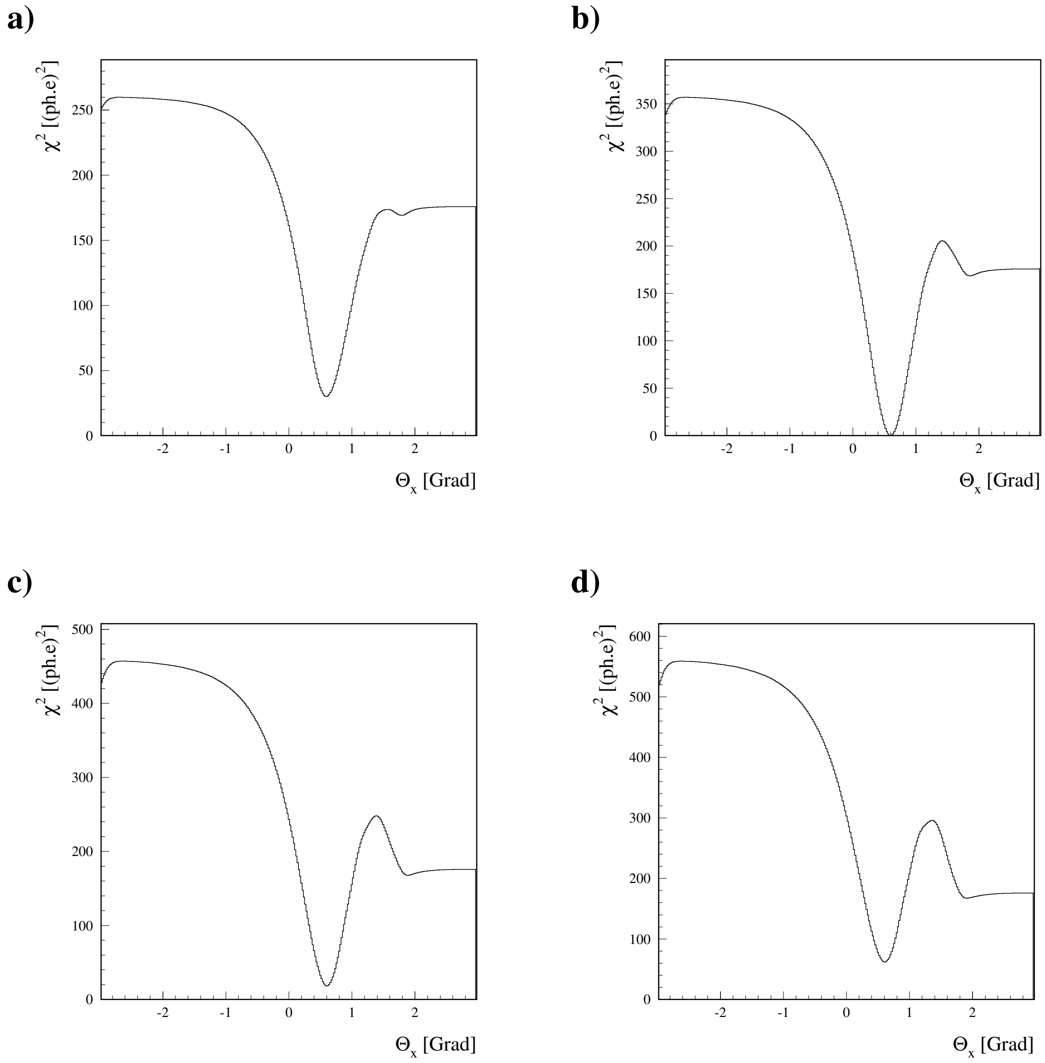


Abbildung 4.16: *Schnitte χ^2 Funktion mit Wichtung nach Gleichung 4.14 eines Schauers der Energie $2\,TeV$, der Schauerneigung $(0.6°, 0.0°)$, dem Schauerabstand $(100\,m, 0\,m)$ und einer Höhe des Schauermaximums von $6.5\,km$ über N.N. entlang der Θ_x-Achse bei einer Energie von a) $1\,TeV$, b) $2\,TeV$, c) $3\,TeV$ und c) $4\,TeV$.*

Wichtung auf der Basis der theoretischen Pixelamplitude

Die Wichtung hat folgende Form:

$$\sigma_{i,t} = 1.5\, A_{i,t}^{theo} + (1.3\, ph.e)^2 \qquad (4.15)$$

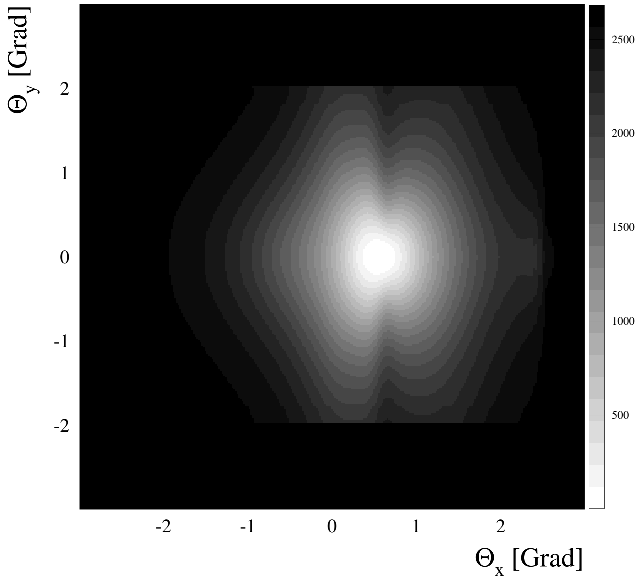


Abbildung 4.17: χ^2 *Funktion mit Wichtung 4.15 eines Schauers der Energie* $1\,TeV$ *und der Schauerneigung (*$0.6°, 0.0°$*), mit einem Schauerabstand (*$0\,m, 0\,m$*) und einer Höhe des Schauermaximums von* $6.5\,km$ *über N.N. in Abhängigkeit von den x- und y-Koordinaten der Schauerneigung. Die restlichen Schauerparameter wurden auf ihren wahren Wert gesetzt und festgehalten.*

Abbildung 4.17 und 4.18 zeigen den Verlauf der χ^2-Funktion eines Schauers der Schauerneigung $(0.6°, 0.0°)$, dem Schauerabstand $(100\,m, 0\,m)$ und einer Höhe des Schauermaximums von $6.5\,km$ über N.N. in Abhängigkeit von der Schauerneigung. Sie weist eine stärkere Steigung auf, als die χ^2-Funktion mit Wichtung 4.14. Dies ist für die Minimierung von Vorteil. Noch bedeutsamer ist, daß die Nebenminima, die bei den vorher diskutierten Funktionen auftraten, jetzt fast vollständig herausgemittelt werden.

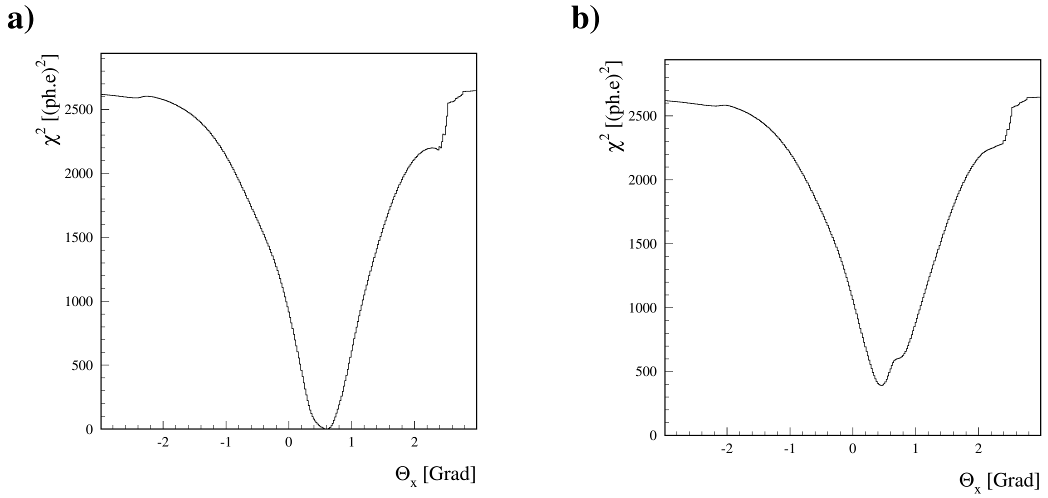


Abbildung 4.18: *In Θ_x-Richtung verlaufende Schnitte χ^2 Funktion mit Wichtung 4.15 eines Schauers der Energie $1\,TeV$, der Schauerneigung $(0.6°, 0.0°)$, mit dem Schauerabstand $(0\,m, 0\,m)$ und einer Höhe des Schauermaximums von $6.5\,km$ über N.N. bei a) $\Theta_y = 0.0°$ und b) $\Theta_y = 0.6°$*

Abbildung 4.19 zeigt den Verlauf der χ^2-Funktion eines Schauers der Schauerneigung $(0.0°, 0.0°)$, dem Schauerabstand $(100\,m, 100\,m)$ und einer Höhe des Schauermaximums von $6.5\,km$ über N.N. Schnitte entlang der R_x-Achse verdeutlichen (Abbildung 4.20), daß die Steigung ebenfalls stärker ist als im Fall der Wichtung 4.14. Der Abfall beim Herauswandern des theoretischen Profils aus der Kamera tritt ebenfalls auf, ist jedoch nicht mehr so stark ausgeprägt.
Dies ist einfach zu erklären. Betrachtet man den Fall, daß das theoretische Profil außerhalb der Kamera liegt, so ist der einzige Teil der χ^2-Funktion, der bei der Wichtung 4.14 auf der Basis des Mittelwertes noch einen Beitrag liefert, der folgende:

$$\sum_{i,t} \frac{A_{i,t}^{mes}}{A_{i,t}^{mes} + (1.3\,ph.e)^2} \tag{4.16}$$

Im Falle der hier diskutierten Wichtung 4.15 hat der übrigbleibende Term die Form:

$$\sum_{i,t} \frac{A_{i,t}^{mes}}{(1.3\,ph.e)^2} \tag{4.17}$$

Der Beitrag ist größer als bei Gleichung 4.16.

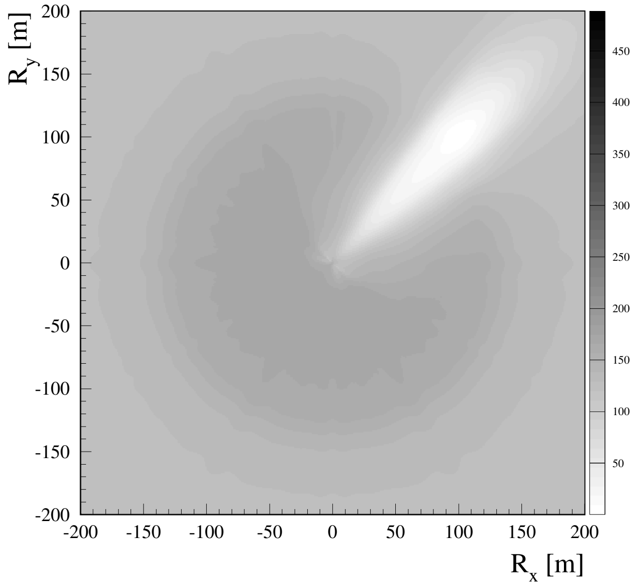


Abbildung 4.19: χ^2 *Funktion mit Wichtung 4.15 eines Schauers der Energie* $1\,TeV$ *und der Schauerneigung* $(0.0°, 0.0°)$*, mit dem Schauerabstand* $(100\,m, 100\,m)$ *und einer Höhe des Schauermaximums von* $6.5\,km$ *über N.N. in Anhängigkeit von den x- und y-Koordinaten des Schauerauftreffpunktes. Die restlichen Schauerparameter wurden auf ihren wahren Wert gesetzt und festgehalten.*

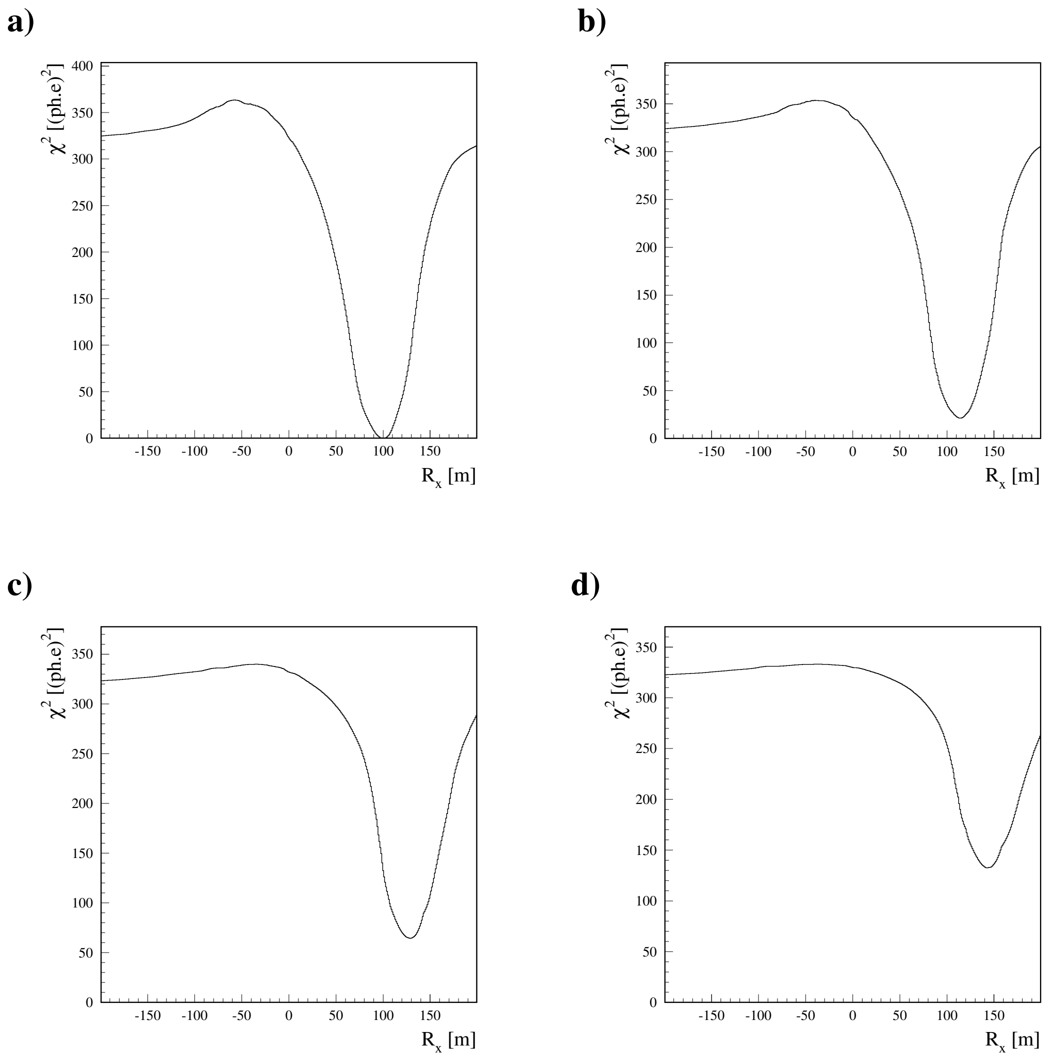


Abbildung 4.20: *Schnitte der χ^2 Funktion mit Wichtung 4.15 eines Schauers der Energie 1TeV, der Schauerneigung $(0.0°, 0.0°)$, dem Schauerabstand $(100\,m, 100\,m)$ und einer Höhe des Schauermaximums von $6.5\,km$ über N.N. die in x-Richtung des Schauerabstandes verlaufen und folgende y-Koordinaten R_y aufweisen a) $100\,m$, b) $120\,m$, c) $140\,m$ und c) $160\,m$*

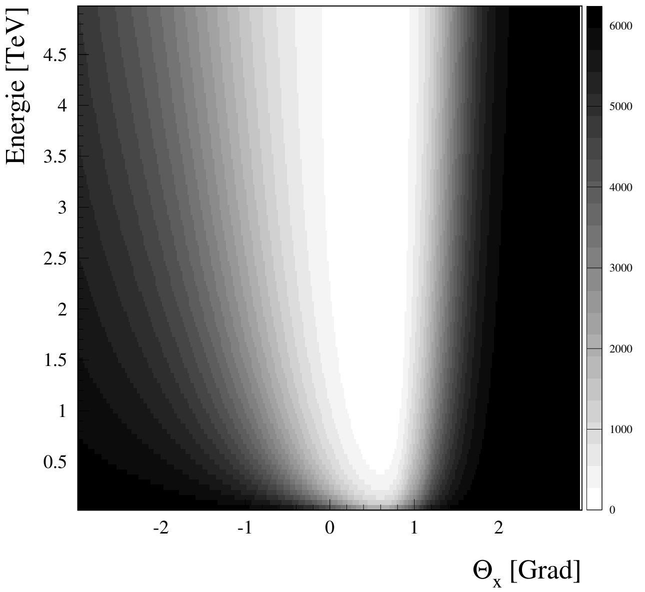


Abbildung 4.21: χ^2 *Funktion mit Wichtung 4.15 eines Schauers der Energie* $2\,TeV$, *der Schauerneigung* $(0.6°, 0.0°)$, *dem Schauerabstand* $(100\,m, 0\,m)$ *und einer Höhe des Schauermaximums von* $6.5\,km$ *über N.N. in Anhängigkeit von der x-Koordinate der Schauerneigung und der Energie. Die restlichen Schauerparameter werden auf ihren wahren Wert gesetzt und festgehalten.*

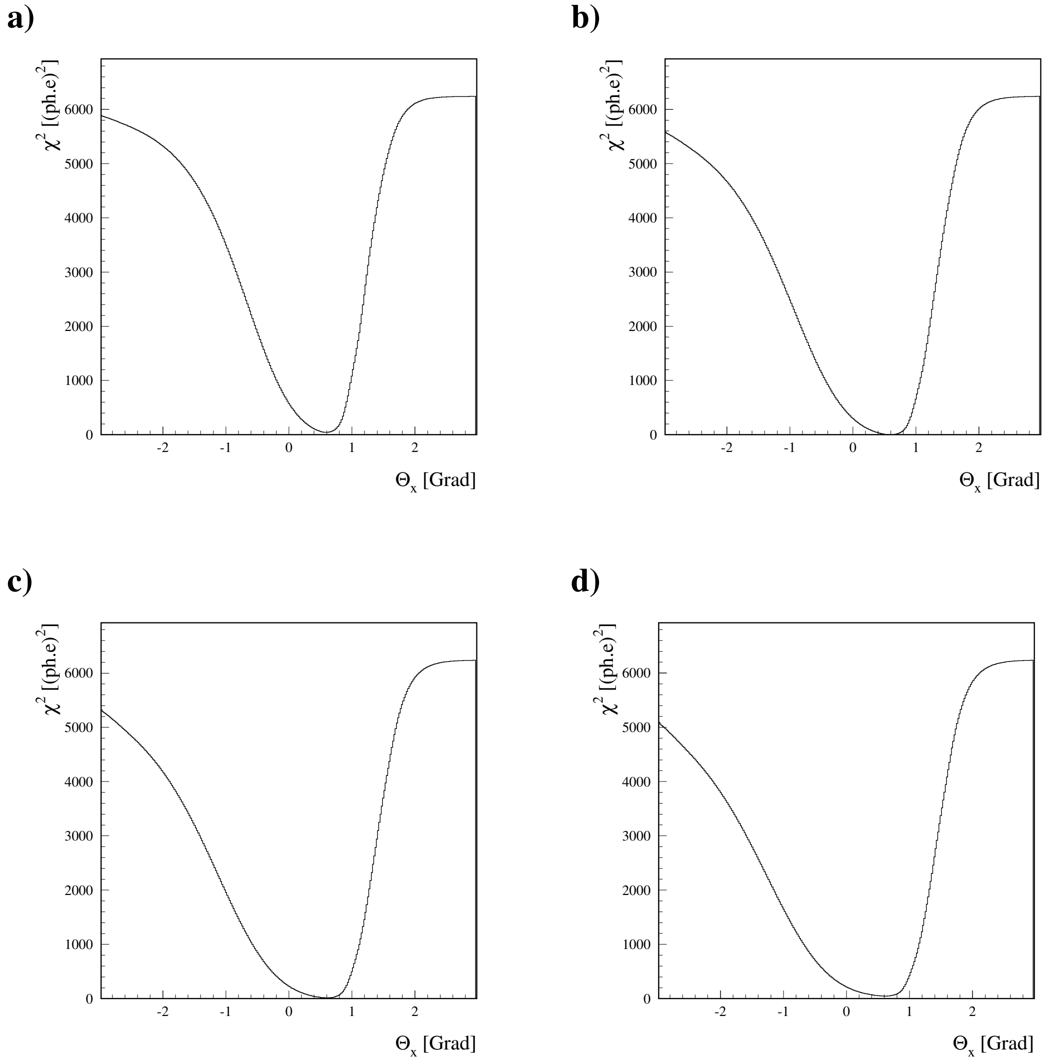


Abbildung 4.22: *Schnitte der χ^2 Funktion mit Wichtung 4.15 eines Schauers der Energie $2\,TeV$, der Schauerneigung $(0.6°, 0.0°)$, dem Schauerabstand $(100\,m, 0\,m)$ und einer Höhe des Schauermaximums von $6.5\,km$ über N.N. entlang der Θ_x-Achse bei einer Energie von a) $1\,TeV$, b) $2\,TeV$, c) $3\,TeV$ und c) $4\,TeV$*

Die χ^2-Funktion ist ebenfalls abhängig von der Energie. Abbildung 4.22 zeigt den Verlauf der χ^2-Funktion eines Schauers der Schauerneigung $(0.6°, 0.0°)$, des Schauerabstand $(100\,m, 0\,m)$, der Energie $2\,TeV$ und einer Höhe des Schauermaximums von $6.5\,km$ über N.N. in Abhängigkeit von der x-Richtung der Schauerneigung und

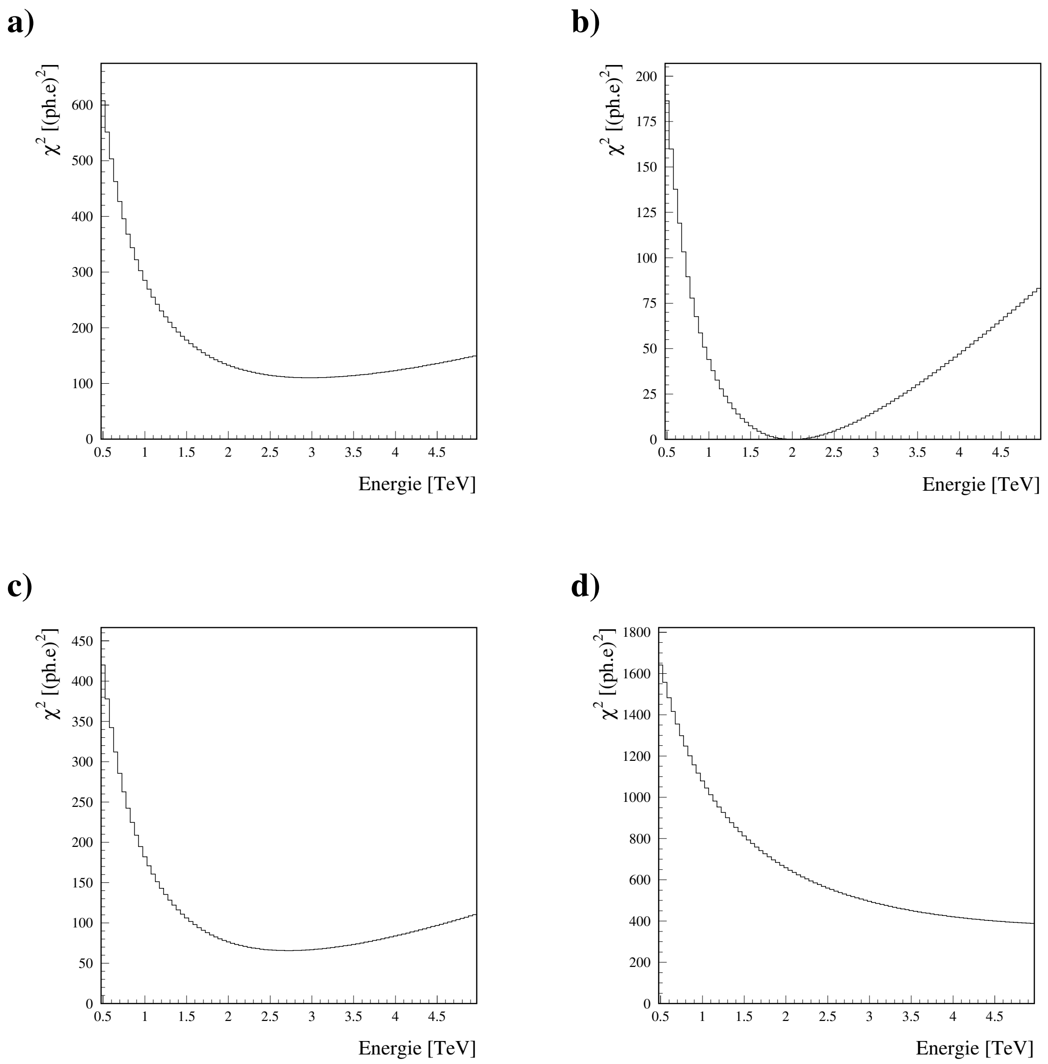


Abbildung 4.23: *Schnitte χ^2 Funktion mit Wichtung 4.15 eines Schauers der Energie $2\,TeV$, der Schauerneigung $(0.6°, 0.0°)$, dem Schauerabstand $(100\,m, 0\,m)$ und einer Höhe des Schauermaximums von $6.5\,km$ über N.N. entlang der Energie-Achse bei Θ_x von a) $0.2°$, b) $0.6°$, c) $0.8°$ und c) $1.°$*

der Energie.
Um den Funktionsverlauf genauer analysieren zu können, zeigt Abbildung 4.22 Schnitte entlang der Θ_x-Achse bei einer Energie von a) $1\,TeV$, b) $2\,TeV$, c) $3\,TeV$ und c) $4\,TeV$. Das erwartete Minimum bei $(0.6°, 0.0°)$ Schauerneigung und einer

Energie von $2\,TeV$ ist deutlich erkennbar (Abbildung 4.23 b)).
In Abbildung 4.23 sind Schnitte entlang der Energie-Achse gezeigt bei Werten für Θ_x von a) 0.2°, b) 0.6°, c) 0.8° und c) $1.^\circ$. Auch hier werden die richtigen Schauerparameter wiedergefunden. Die Funktion ist glatt und hat im gesamten Bereich einen vernünftigen Verlauf.

Die einzige Möglichkeit, den Verlauf der χ^2-Funktion zu verbessern, besteht darin, den Abfall der Funktion bei grösseren Abweichungen zu verzögern, bis das theoretische Profil vollständig außerhalb der Kamera liegt.
Eine Größe, die über die Lage des theoretischen Profils in der Kamera Auskunft gibt, ist die Gesamtamplitude $A^{theo}_{gesamt,t} = \sum_i A^{theo}_{i,t}$. Verlangt man, daß $0 = \sum_i (A^{mes}_{i,t} - k_t \cdot \sum_i \cdot A^{theo}_{i,t})$ ist, so werden die Pixelamplituden eines theoretischen Profils, das fast außerhalb der Kamera liegt, durch den Faktor k_t skaliert. Dies könnte man folgendermaßen realisieren:

$$k_t = \frac{\sum_i A^{mes}_{i,t}}{\sum_i A^{theo}_{i,t}} \; f\ddot{u}r \; \sum_i A^{theo}_{i,t} \neq 0 \tag{4.18}$$

$$k_t = \frac{\sum_i A^{mes}_{i,t}}{0.001} \; f\ddot{u}r \; \sum_i A^{theo}_{i,t} = 0 \tag{4.19}$$

Damite erhält man:

$$\chi^2 = \sum_{i,t} \frac{(A^{mes}_{i,t} - k_t \frac{1}{q} A^{theo}_{i,t})^2}{\sigma^2_{i,t} + (1,3\,ph.e)^2} \tag{4.20}$$

Dies ist jedoch mit dem hier zugrunde gelegten Schauermodell nicht möglich, da die Energieabhängigkeit als linear mit der Pixelamplitude angenommen wird, d.h. $A^{theo}_{i,t}(E) = E \cdot A^{theo}_{i,t}(1TeV)$. Für die χ^2-Funktion hat diese Skalierung nämlich zur Folge, daß deren Energieabhängigkeit vollständig eliminiert wird:

$$\begin{aligned}
A^{theo}_{gesamt,t}(E) &= E \cdot A^{theo}_{gesamt,t}(1TeV) \\
k_t(E) &= \frac{A^{mes}_{gesamt,t}}{E \cdot A^{theo}_{gesamt,t}(1TeV)} \\
k_t(E) &= \frac{k_t(1TeV,)}{E} \\
\chi^2(E) &= \sum_{i,t} \frac{(A^{mes}_{i,t}(E) - \frac{k_t(1TeV)}{E} E \cdot A^{theo}_{i,t}(1TeV,))^2}{\sigma_{i,t}} \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Eine solche Skalierung könnte erfolgversprechend sein, wenn ihm ein theoretisches Modell zugrunde gelegt wird, das die prinzipielle Nichtlinearität der Energieabhängigkeit berücksichtigt.

4.2.2 Vergleich der unterschiedlichen Wichtungen

Der folgende Abschnitt befaßt sich mit der Anwendung der unterschiedlichen Wichtungen auf Monte Carlo Daten im Energiebereich zwischen $0.5\,TeV$ und $5\,TeV$ und mit einem Zenitwinkel von $0.0°$.

Wahl der Startbedingungen

Die Startwerte für Schauerneigung und -richtung liefert die geometrische Rekonstruktion. Der Anfangswert der Energie stammt aus der im Kapitel 3.4 beschriebenen Energierekonstruktion. Die Schauerhöhe wird auf $6.5\,km$ über N.N. gesetzt. Dies entspricht einen Skalierungsfaktor q von eins. Es werden nur Schauer verwendet, die einen Schauerabstand kleiner $250\,m$ vom jeweiligen Teleskop haben, und die in mindestens zwei Teleskopen Gesamtamplituden größer als $40\,ph.e$ aufweisen.

Wahl der Fitregion

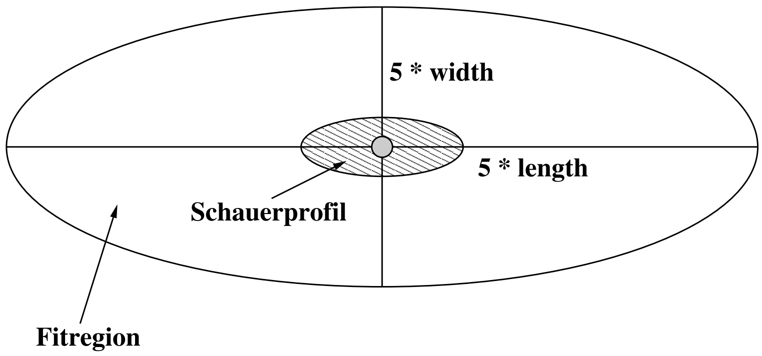


Abbildung 4.24: *Abgebildet ist die Fitregion. Es werden alle Photomultiplier verwendet, die innerhalb der Ellipse mit den Halbachsen $5 \cdot width$ und $5 \cdot length$ liegen*

Bei der Berechnung der χ^2-Funktion wird nur ein Teil der Pixel in der Kamera berücksichtigt. Das geschieht, zum ersten, um Rechenzeit zu sparen, zum zweiten, um den Fit durch Eingrenzung des Bereichs zu stabilisieren. Zur Auswahl der geeigneten Pixel werden die Hillas-Parameter *length* und *width* benutzt. Es werden nur diejenigen ausgewählt, die innerhalb einer Ellipse mit den Halbachsen $5 \cdot length$ und $5 \cdot width$ liegen. (siehe Abbildung 4.24)

$$5 \geq \sqrt{\frac{x^2}{length^2} + \frac{y^2}{width^2}} \qquad (4.22)$$

Damit auch kleine Bilder mit *width* ≈ 0 oder *length* ≈ 0 Berücksichtigung finden, wird eine untere Grenze von 0.05° für *width* und 0.25° für *length* gesetzt. Die Festsetzung einer Fitregion hat zur Folge, daß der Bereich der Startwerte, für den die Minimierung durchführbar ist, kleiner wird. Dies wird im folgendem Abschnitt diskutiert.

Einfluß der Fitregion auf den Verlauf der χ^2-Funktion

Abbildung 4.25 zeigt Schnitte der χ^2-Funktion eines Schauers der Schauerneigung $(0.6°, 0.0°)$, des Schauerauftreffpunktes $(0\,m, 0\,m)$, der Energie $1\,TeV$ und der Schauerhöhe von $6.5\,km$ entlang der Θ_x-Achse bei Θ_y von 0.0° (Abbildung 4.25 a) und c)) sowie bei $\Theta_y = 0.6°$ (Abbildung 4.25 b) und d)). Abbildung 4.25 a) und b) beziehen sich auf die χ^2-Funktion mit Wichtung 4.14, c) und d) mit Wichtung 4.15. Die durchgezogene Linie gilt, wenn die Fitregion die gesamte Kamera abdeckt, die gestrichelte Linie für die Fitregion der Größe $5 \cdot$ *length* und $5 \cdot$ *width*, wie sie im folgenden verwendet wird.
Die Grösse der Fitregion hat bei Wichtung 4.14 auf der Basis des Mittelwertes einen viel stärkeren Einfluß als bei der Wichtung auf der Basis der theoretischen Pixelamplitude 4.15. Dieser Effekt läßt sich anhand der, wie folgt, umgeformten χ^2-Funktion erklären:

$$\chi^2 = \underbrace{\sum_{i,t} \frac{(A_{i,t}^{theo})^2}{\sigma_{i,t}^2}}_{1} - \underbrace{\sum_{i,t} \frac{2\,A_{i,t}^{theo}\,A_{i,t}^{mes}}{\sigma_{i,t}^2}}_{2} + \underbrace{\sum_{i,t} \frac{(A_{i,t}^{mes})^2}{\sigma_{i,t}^2}}_{3}$$

Zuerst wird der Fall der Wichtung 4.14 auf der Basis des Mittelwertes der Meßamplitude und der theoretischen Amplitude diskutiert. Die χ^2-Funktion lautet:

$$\begin{aligned}
\chi^2 \quad = \quad & \underbrace{\sum_{i,t} \frac{(A_{i,t}^{theo})^2}{1.5\,\frac{A_{i,t}^{theo}+A_{i,t}^{mes}}{2} + (1.3\,ph.e)^2}}_{1} \\
- \quad & \underbrace{\sum_{i,t} \frac{2\,A_{i,t}^{theo}\,A_{i,t}^{mes}}{1.5\,\frac{A_{i,t}^{theo}+A_{i,t}^{mes}}{2} + (1.3\,ph.e)^2}}_{2} \\
+ \quad & \underbrace{\sum_{i,t} \frac{(A_{i,t}^{mes})^2}{1.5\,\frac{A_{i,t}^{theo}+A_{i,t}^{mes}}{2} + (1.3\,ph.e)^2}}_{3}
\end{aligned}$$

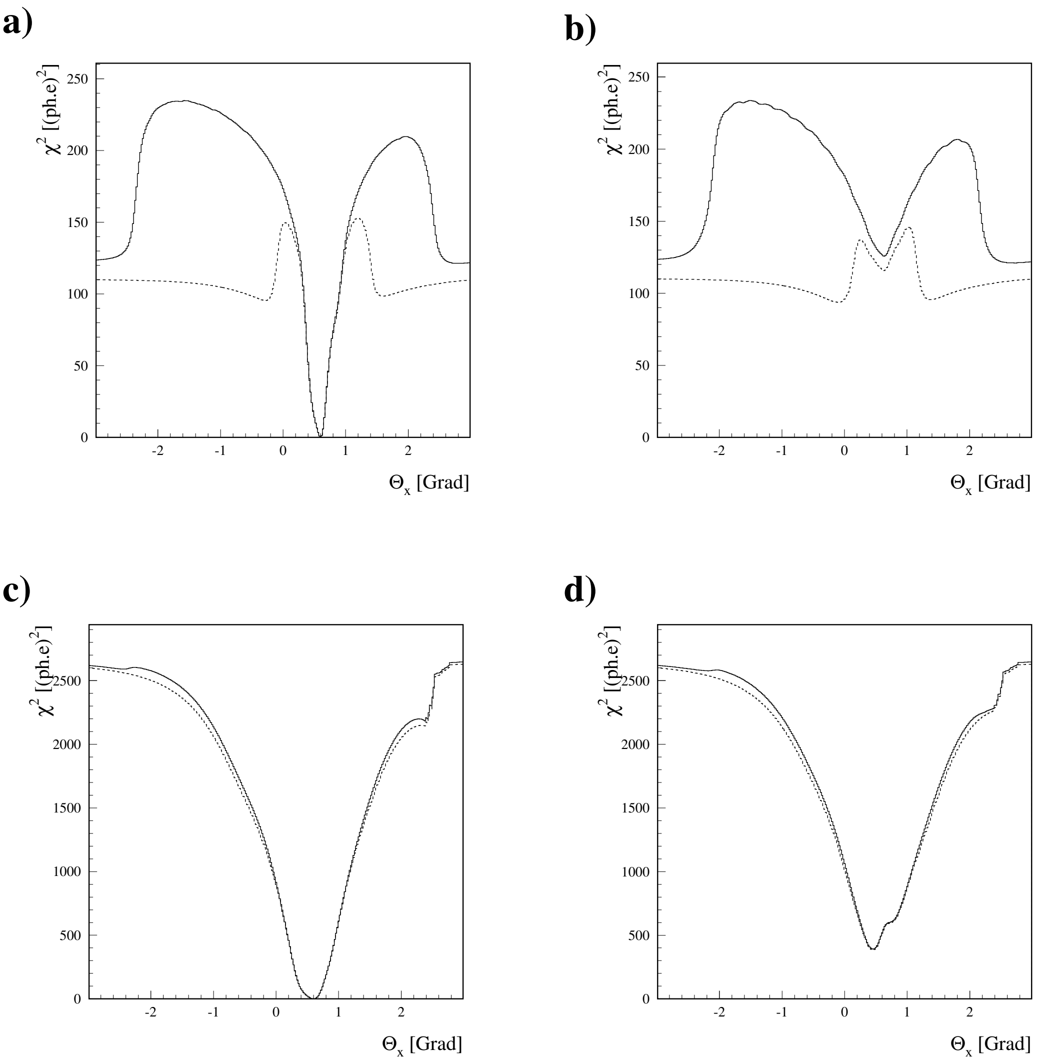


Abbildung 4.25: *Die oberen Bilder zeigen Schnitte der χ^2-Funktion mit Wichtung 4.14, die unteren mit Wichtung 4.15 eines Schauers der Energie $1\,TeV$, der Schauerneigung ($0.6°, 0.0°$), mit dem Schauerauftreffpunkt ($0\,m, 0\,m$) und der Schauerhöhe von $6.5\,km$ über N.N. entlang der Θ_x-Achse bei a) und c) Θ_y von $0.0°$ und bei b) und d) $\Theta_y = 0.6°$. Die durchgezogene Linie gilt, wenn die Fitregion die gesamte Kamera abdeckt, die gestrichelte Linie für die Fitregion der Größe $5 \cdot length$ und $5 \cdot width$.*

Das Maximum des Meßprofils und des theoretischen Profils liegen zuerst getrennt innerhalb der Fitregion (siehe Abbildung 4.26 a)). Beide Profile überlappen.

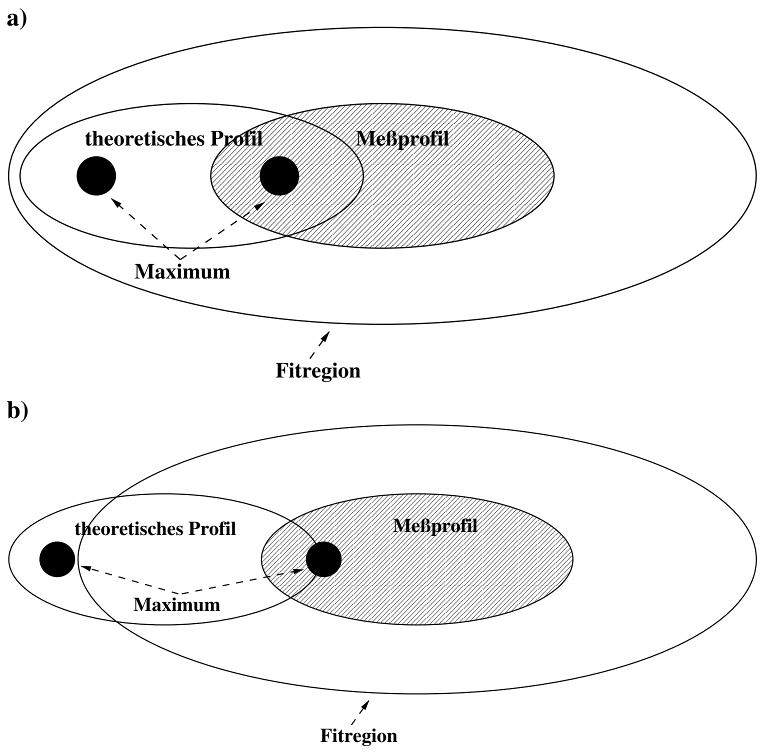


Abbildung 4.26: *Dargestellt ist die Lage des theoretischen Profils und des Meßprofils bezüglich der Fitregion*

Teil 1 und Teil 3 der χ^2-Funktion liefern ungefähr den gleichen Beitrag. Teil 2 ist sehr klein, dies entspricht dem Bereich kurz vor Erreichen des Maximums in Abbildung 4.27. Als nächstes liegt das Maximum des theoretischen Profils außerhalb der Fitregion (siehe Abbildung 4.26 b)). Die Pixelamplituden des theoretischen Profils weist nur noch einen geringen Wert auf. Teil 1 und Teil 2 sind zu vernachlässigen. Nur Teil 3 liefert einen nennenswerten Beitrag von ca. $80\,ph.e.$ Wandert das Profil weiter aus der Fitregion heraus, bleibt der Funktionswert von χ^2 nahezu konstant.

Der Unterschied des Einflusses der Fitregion auf die verschiedenen Wichtungen tritt erst auf, wenn das Maximum außerhalb der Fitregion liegt.

Die χ^2-Funktion mit Wichtung 4.15 lautet:

$$\chi^2 = \underbrace{\sum_{i,t} \frac{(A_{i,t}^{theo})^2}{1.5\,A_{i,t}^{theo} + (1.3\,ph.e)^2)}}_{1} - \underbrace{\sum_{i,t} \frac{2\,A_{i,t}^{theo}\,A_{i,t}^{mes}}{1.5\,A_{i,t}^{theo} + (1.3\,ph.e)^2)}}_{2} + \underbrace{\sum_{i,t} \frac{(A_{i,t}^{mes})^2}{1.5\,A_{i,t}^{theo} + (1.3\,ph.e)^2)}}_{3}$$

Betrachtet man wiederum Fall a) von Abbildung 4.26, liefert Teil 1 und Teil 2 Beiträge, die im Vergleich zu Teil 3 vernachlässigbar sind. Wandert das Maximum aus der Fitregion (Abbildung 4.26 b)) nimmt der Wert der theoretischen Pixelamplitude im Bereich der Meßamplitude immer weiter ab, d.h. Teil 3 nimmt weiter zu, bis das theoretische Profil vollständig außerhalb der Fitregion liegt oder bis das theoretische Profil und das Meßprofil vollständig von einander getrennt sind, obwohl beide noch innerhalb der Fitregion liegen.

Beim Vergleich des Verlaufs der χ^2-Funktion mit einer Fitregion gemäß Gleichung 4.22 und mit einer Fitregion, die die ganze Kamera abdeckt, fällt auf, daß der Abfall am Rande der Kamera auf einen konstanten Wert, nicht auftritt, wenn die Fitregion hinreichend eingeschränkt wird (siehe Abbildungen 4.26 und 4.27). Die χ^2-Funktion steigt vielmehr auf einen konstanten Wert an. Wenn die Fitregion die ganze Kamera umfaßt, tritt das Maximum der χ^2-Funktion genau dann auf, wenn das theoretische Profil und das Meßprofil getrennt voneinander innerhalb der Kamera liegen. Die Einschränkung der Fitregion erzwingt die Überlappung der beiden Profile.
In Abbildung 4.27 ist der Verlauf der χ^2-Funktion in Abhängigkeit von der x-Koordinate des Schauerauftreffpunktes dargestellt. Er weist die selben Charakteristika auf wie die Abhängigkeit von der Schauerneigung. Auch die Erklärung ist dieselbe. Jedoch muß bei der Diskussion des Funktionsverlaufs und des fehlenden Abfalls der χ^2-Funktion am Rande der Fitregion, wenn diese auf $5 \cdot width$ und $5 \cdot length$ begrenzt wird, beachtet werden, daß die Pixelamplitude, wie bereits im Abschnitt **??** erklärt wurde, vom Schauerabstand abhängig ist. Diese Variation der Pixelamplitude hat erst dann einen starken Einfluß, wenn die Profile getrennt innerhalb der Fitregion liegen. Dieser Fall tritt bei einer Fitregion der Größe $5 \cdot length$

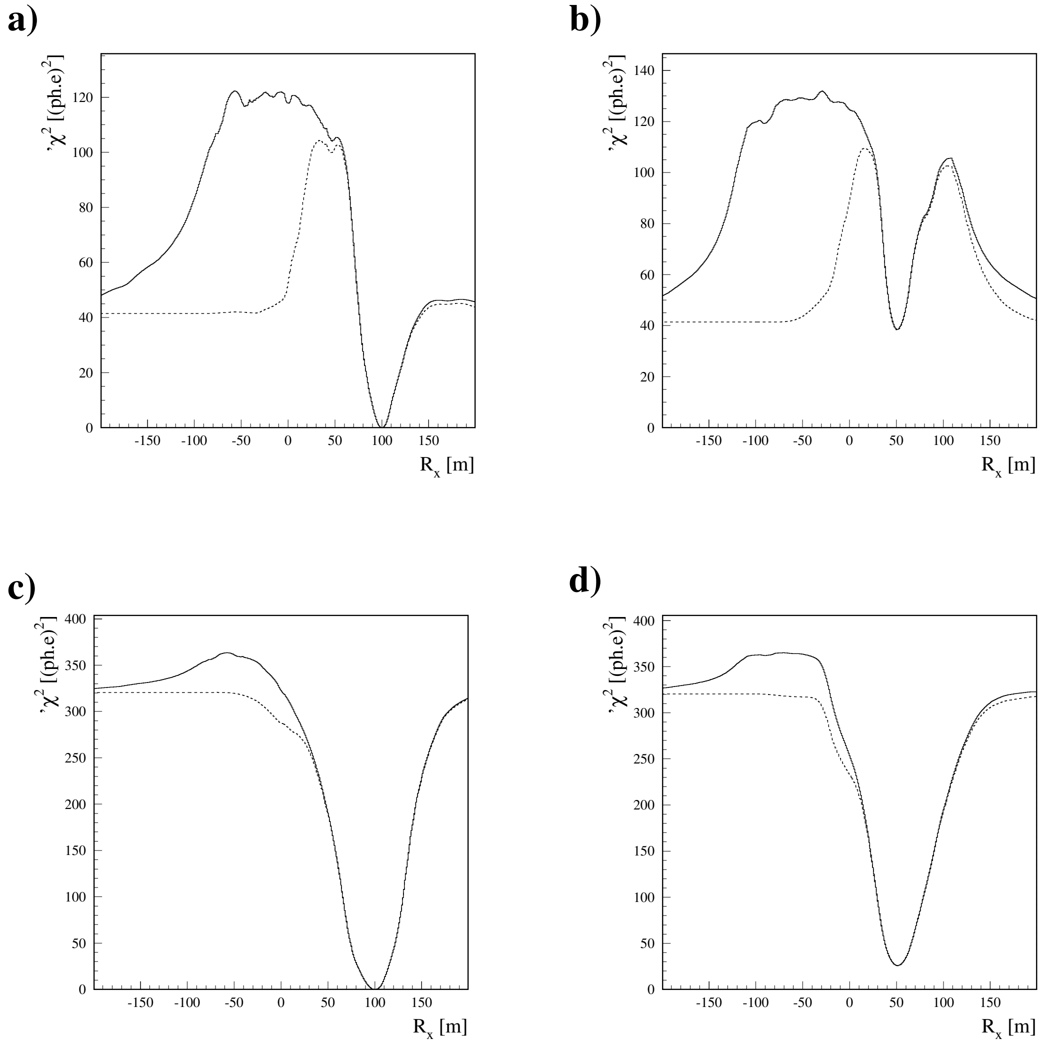


Abbildung 4.27: *Die oberen Bilder zeigen Schnitte der χ^2-Funktion mit Wichtung 4.14, die unteren mit Wichtung 4.15 eines Schauers der Energie $1\,TeV$, der Schauerneigung $(0.0^\circ, 0.0^\circ)$, mit einem Schauerauftreffpunkt $(100\,m, 100\,m)$ und der Schauerhöhe von $6.5\,km$ über N.N. entlang der R_x-Achse bei a) und c) R_y von $100m$ und bei b) und d) $R_y = 50m$. Die durchgezogene Linie gilt, wenn die Fitregion die gesamte Kamera abdeckt, die gestrichelte Linie für die Fitregion der Größe $5 \cdot length$ und $5 \cdot width$.*

und $5 \cdot width$ jedoch nicht ein.

Vergleich der Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die unterschiedlichen Wichtungen auf Monte Carlo Daten im Energiebereich von $0.5\,TeV$ bis $5\,TeV$ mit einem Zenitwinkel von $0.0°$ angewendet und die Ergebnisse verglichen.
In Abbildung 4.28 ist die Auflösung der Schauerrichtung in Abhängigkeit von der Energie für unterschiedliche Wichtungen aufgetragen. Als Auflösung wird hier der Wert definiert, bei dem 68% der Einträge kleinere Werte besitzen. Wie zu erwarten, liefert die χ^2-Funktion mit Wichtung nach Gleichung 4.12 die schlechtesten Ergebnisse. Wichtung 4.15 weist geringfügig bessere Werte auf (um ca. $0.005°$) als Wichtung 4.14. Der Unterschied zwischen den Wichtungen 4.15 und 4.14 ist nicht statistisch signifikant.
Abbildung 4.29 zeigt die Auflösung des Schauerauftreffpunktes in Abhängigkeit von der Energie. Man erhält den gleichen Verlauf. Die Ergebnisse der Wichtung 4.15 sind wiederum die besten.

Es ist verwunderlich, daß die Verbesserung durch die Wichtung auf der Basis des theoretischen Profils nicht größer ist. Die Auflösung der geometrischen Rekonstruktion liegt jedoch bei $0.1°$ bezüglich der Schauerneigung und bei $15m$ bezüglich des Schauerauftreffpunktes. Innerhalb dieses Bereiches zeigen beide χ^2-Funktionen einen vernünftigen Verlauf.

Im folgendem wird Wichtung 4.15 verwendet.

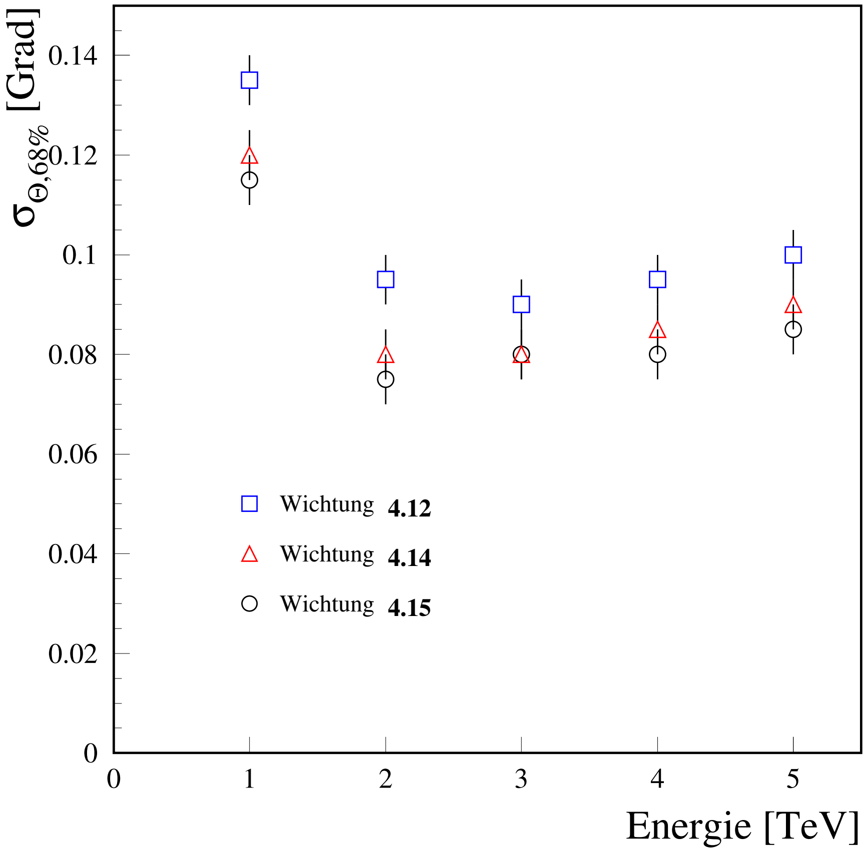


Abbildung 4.28: *Dargestellt ist die Auflösung der Schauerrichtung in Abhängigkeit von der Energie und den unterschiedlichen Wichtungen.*

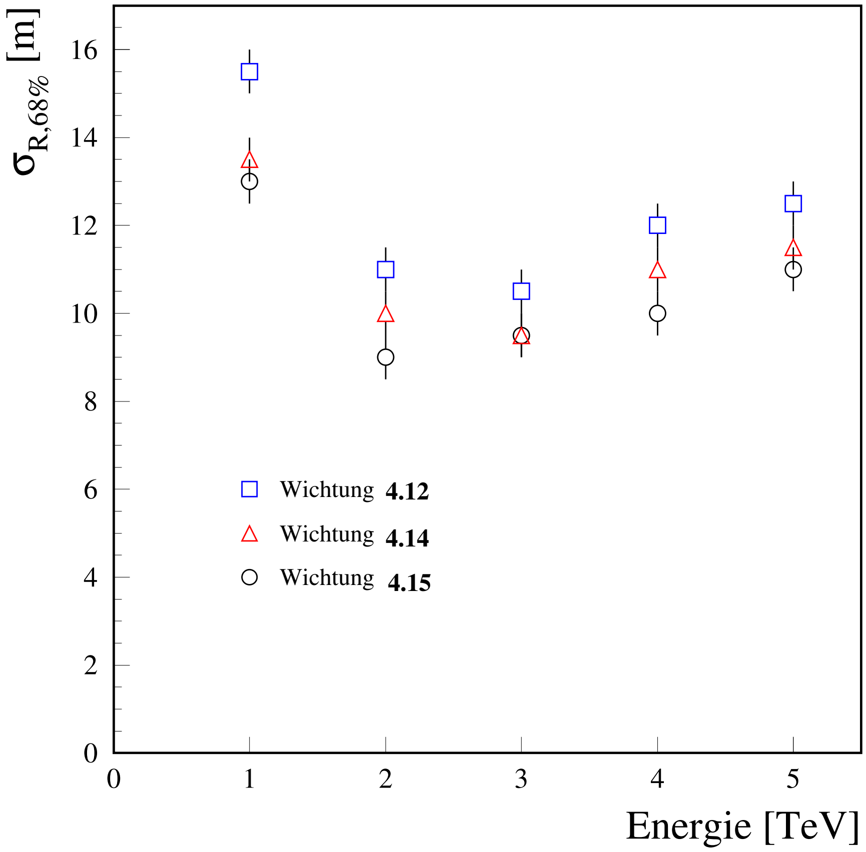


Abbildung 4.29: *Dargestellt ist die Auflösung des Schauerauftreffpunktes in Abhängigkeit von der Energie und den unterschiedlichen Wichtungen.*

Kapitel 5

Voruntersuchungen

Im folgenden Kapitel werden Untersuchungen an einem Einzelteleskop geschildert, die der Anwendung der Fitmethode auf Monte Carlo Daten eines Mehrteleskopsystems (Kapitel 6) und auf reale Meßdaten (Kapitel 7) vorausgehen. Es wurde ein Meßprofil aus dem theoretischen, in einer Tabelle abgespeicherten Profil, erzeugt und nachträglich verschmiert. Auf dieses synthetische Meßprofil wurde der Fit angewendet und mit den Hillas Parametern der geometrischen Rekonstruktion verglichen. Hierdurch wurde die Numerik der Fitroutine überprüft.

5.1 Erzeugung des Meßprofils in der Kamera

Wie in Kapitel 4.1.4 beschrieben, liegen die theoretischen Profile von γ-Schauern der Energie $1\,TeV$ und der Schauerhöhe von $6.5\,km$ über N.N. für Schauerauftreffpunkte $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ zwischen 0 und $300\,m$ in Abhängigkeit von den Koordinaten des Schauerauftreffpunkts und des Pixelmittelpunkts im Fitkoordinatensystem in einer Tabelle abgespeichert vor. Daraus wird das Meßprofil nach folgendem Schema erzeugt:

1. Festlegung des Schauerauftreffpunktes R. Erzeugung des Meßprofils mit Hilfe des Look-Up-Tabelle im Fitkoordinatensystem mittels linearer Interpolation (siehe 4.1.5).

2. Transformation des Profils ins Kamerakoordinatensystem.
   Hierfür benötigt man die Koordinaten des Schauerauftreffpunktes (R_x, R_y) und der Schauerneigung (Θ_x, Θ_y)

   - **Bestimmung von (R_x, R_y)**
     Die x-Koordinate R_x wird gleichverteilt zwischen 0 und R gewürfelt, R_y

erhält man durch $R_y = \sqrt{R^2 - R_x^2}$. Das Vorzeichen wird bei jedem Durchlauf geändert. Dadurch werden Systematiken vermieden.

- **Bestimmung von (Θ_x, Θ_y)**
  Der Betrag der Schauerrichtung $\Theta = \sqrt{\Theta_x^2 + \Theta_y^2}$ kann beliebig zwischen 0° und 2° festgelegt werden. Bei der Bestimmung von Θ_x und Θ_y wird das gleiche Verfahren wie beim Schauerauftreffpunkt angewendet.

3. Bei der Überprufung der Energieabhängigkeit wird eine lineare Abhängigkeit der Pixelamplitude von der Energie vorausgesetzt:

$$A(E) = E \cdot A(1TeV)$$

   A bezeichnet die Pixelamplitude.

Das erzeugte Profil ist noch kein gutes Modell eines Meßprofils, da Meßprofile Fluktuationen unterworfen sind. Deshalb werden die Fluktuationen der Photomultiplier sowie der Digitalisierungseffekt explizit berücksichtigt.

4. **Berücksichtigung der Fluktuation der Photomultiplier**
   Es wird die Annahme gemacht, daß das Signal von Photomultipliern einer Normalverteilung mit $\sigma = 1.1\sqrt{N}$ folgt. N bezeichnet die Anzahl der Photoelektronen.
   Zur Simulation der Fluktuationen wird ein gaußverteilter Zufallswert generiert mit einer Verteilung, die ein Maximum bei der bereits erzeugten Pixelamplitude N_P hat, und die eine Breite von $1.1\,\sqrt{N_P}$ aufweist. Der Zufallwert wird als neue Pixelamplitude verwendet.

5. **Berücksichtigung des Digitalisierungseffektes der Kamera**
   Der Digitalisierungseffekt der Kamera wird durch willkürliches Verschieben des Profils innerhalb eines Pixels simuliert.

Trotz der Berücksichtigung dieser Fluktuation, gibt das Profil kein realistisches Meßprofil wieder, da viele Effekte, wie Spiegelaberration etc. nicht berücksichtigt sind.

5.2 Wahl der Startwerte des Fits

Bei der Wahl der Startwerte wird ausgenutzt, daß die lange Achse des Schauerbildes in Richtung Schauerauftreffpunkt zeigt. Für die Schauerrichtung wird eine Position festgelegt, die $3 \cdot length$ vom Bildschwerpunkt entfernt liegt (zur Definition von *length* siehe 2.2). Da unbekannt ist, in welcher Richtung der Auftreffpunkt, vom Bildschwerpunkt aus gesehen, liegt, wird von den beiden möglichen Positionen

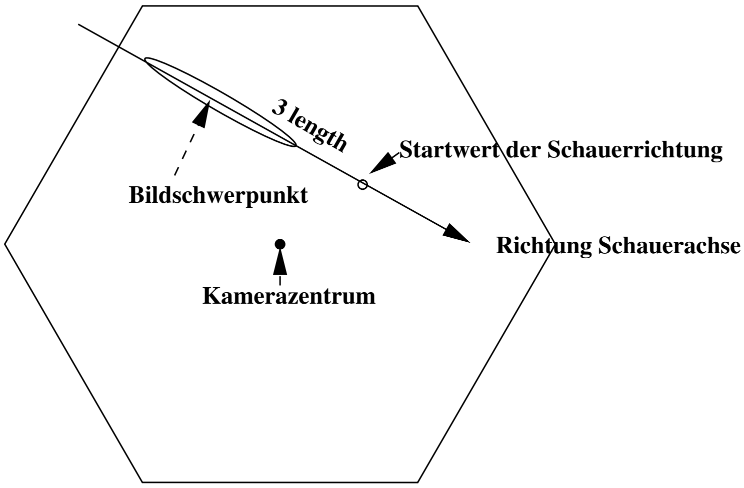


Abbildung 5.1: *Dargestellt ist die Wahl des Startwertes der Schauerrichtung*

auf der Längsachse diejenige ausgewählt, die näher am Kamerazentrum liegt (siehe Abbildung 5.1).
Zur Abschätzung des Schauerauftreffpunktes nutzt man die Korrelation zwischen dem Abstand des Bildschwerpunkts vom Kamerazentrum (distance) und dem Schauerabstand zum Teleskop. Der Startwert des Schauerabstands wird auf $R = 120\, m/Grad \cdot distance$ gesetzt. Die Energie wird durch $E = A/(200\, ph.e) \exp{(-R/120m)}$ berechnet. Der Faktor q wird auf 1 gesetzt und festgehalten. Diese Wahl der Startwerte wurde bereits von M. Ullrich verwendet [6]. Die Wichtung erfolgt gemäß Gleichung 4.15.

5.3 Fitregion

Die verwendete Fitregion ist in Kapitel 4.2.2 definiert. Bei der Berechnung der χ^2-Funktion wird über alle Pixel, die innerhalb einer Ellipse mit den Halbachsen $5 \cdot length$ und $5 \cdot width$ liegen, summiert.

5.4 Vergleich zweier Minimierungsfunktionen

Die Schauerrekonstruktion durch Modellanpassung (Fit) beruht auf der Minimierung einer geeigneten χ^2-Funktion, deren absolutes Minimum in Abhängigkeit von den Schauerparametern ermittelt werden muß. Die Auswahl einer geeigneten Routine kann entscheidend für den Zeitbedarf und die Auflösung sein. Deshalb wurden zwei verschiedene Minimierungsfunktionen verglichen. Die Ergebnisse werden in diesem Abschnitt diskutiert.

5.4.1 Die Minimierungsfunktion E04FCF der NAG-Library

E04FCF ist zur Minimierung von Funktionen der Form

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} (f_i(x))^2 \tag{5.1}$$

geschrieben worden. x ist ein Vektor der Länge n ($x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$). m muß der Bedingung $m \geq n$ gehorchen. Von Startwerten ausgehend, die vom Benutzer vorgegeben werden, berechnet die Routine neue Werte $(x^{(1)}, x^{(2)}, ...)$, welche gegen das absolute Minimum der Funktion streben. Es gilt:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)} \tag{5.2}$$

$p^{(k)}$ gibt die Richtung der Minimierung an. $\alpha^{(k)}$ wird so gewählt, daß $f(x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)})$ unter Berücksichtigung von α nahezu minimal wird. Die Berechnung von $p^{(k)}$ wird in der Beschreibung der Routine jedoch nicht genauer erläutert. (Weitere Informationen gibt [8])

5.4.2 Die Minimierungsfunktion AMOEBA aus Numerical Recipes

Diese Minimierungsfunktion basiert auf geometrischen Grundlagen. Betrachtet man die Minimierung einer n-dimensionalen Funktion, so werden (n+1) Startwerte benötigt, die einen Simplex definieren. Durch die Bestimmung eines Startwertes P_0 erhält man die restlichen durch die folgende Gleichung:

$$P_i = P_0 + \lambda e_i \tag{5.3}$$

e_i bezeichen die Einheitsvektoren, λ ist in einer für das Problem charakteristischen Größenordnung zu wählen.
Die Funktionswerte der χ^2-Funktion $(\chi_1^2, \chi_2^2, \chi_3^2, ...)$ der jeweiligen Startwerte $(P_1, P_2, ...)$ bestimmen den weiteren Ablauf des Programms. Die Minimierung erfolgt durch Anwendung der folgenden Iterationsschritte.

1. Spiegelung der Startwerte P_{max} des höchsten χ^2-Wertes an der durch die restlichen Startwerte definierten "Ebene". Dies ist in Abbildung 5.2 a) für den Fall einer dreidimensionalen χ^2-Funktion dargestellt.

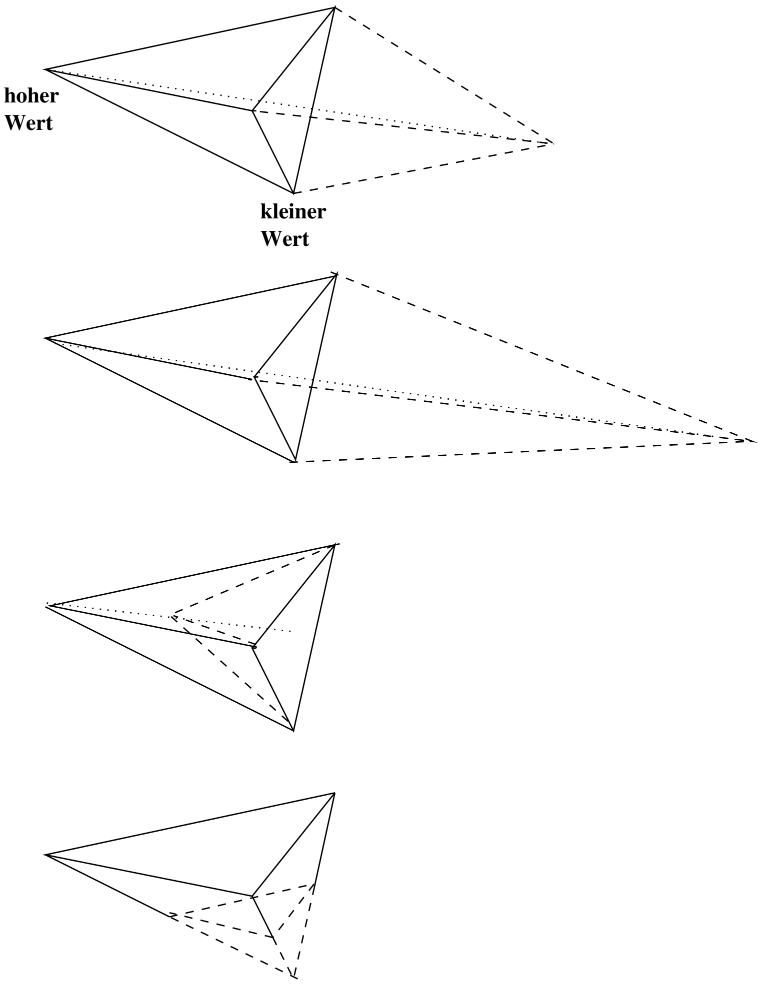


Abbildung 5.2: *Mögliche Funktionsschritte der Routine AMOEBA in drei Dimensionen. (übernommen aus [23])*

2. Spiegelung von P_{max} an der durch die restlichen Startwerte definierten "Ebene" und Verschiebung um den Faktor 2 nach außen. (siehe Abbildung 5.2 b)).

3. Verschiebung von P_{max} um die Hälfte der Differenz zwischen der Ebene der restlichen Startwerte P_i und der Lage von P_{max} in Richtung der Ebene. (siehe Abbildung 5.2 c)).

4. Eine Verschiebung aller Startwerte in Richtung der Startwerte mit den kleinsten χ^2 (siehe Abbildung 5.2 d)).

Genauere Information über diese Minimierungsroutine findet sich in [23].

5.4.3 Vergleich der beiden Minimierungsroutinen

Der Fit wurde auf die oben beschriebenen Meßprofile angewendet. Es wurden jeweils 3000 Ereignisse mit Schauerauftreffpunkten zwischen 0 und 200 m erzeugt. Die Energie wurde gleichverteilt zwischen 0 und $10\,TeV$ gewürfelt und die Schauerrichtung auf 0.0° festgelegt.
Als Kriterium der Güte des Fits wurde der miss-Parameter verwendet. Er gibt den kürzesten Abstand zwischen wahrer Schauerrichtung und Längsachse des Schauerprofils an (siehe Abbildung 5.3) und stellt im Falle eines Teleskopsystems den relevanten Parameter für die Winkelauflösung dar.

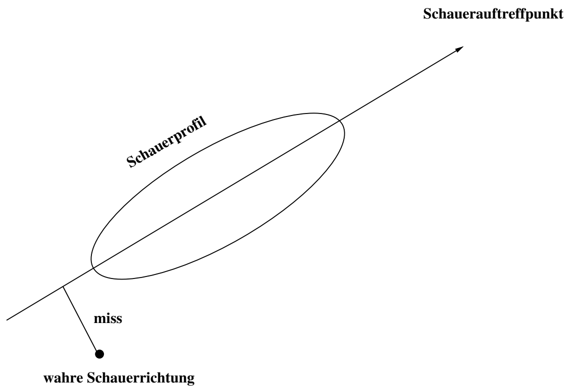


Abbildung 5.3: *Dargestellt ist der miss-Parameter.*

Die Verteilung des miss-Parameters ist, wie erwartet, eine Gaussverteilung dar. (siehe Abbildung 5.4).
Als Auflösung σ_{miss} wird die Breite dieser Verteilung verwendet.
In Abbildung 5.5 ist die Auflösung in Abhängigkeit der Energie für beide soeben beschriebenen Minimierungsroutinen angegeben. Das Ergebnis ist innerhalb der ermittelten Ungenauigkeit identisch. Das gleiche Ergebnis zeigt sich für die Auflösung in Abhängigkeit vom Schauerauftreffpunkt (Abbildung 5.6).

Da beide Funktionen die gleiche Auflösung liefern, ist es sinnvoll, diejenige Funktion auszuwählen, die die geringste Rechenzeit benötigt. Dies ist Routine E04FCF, die etwa viermal schneller ist. Diese wird deshalb in den folgenden Kapitel ausschließlich verwendet.

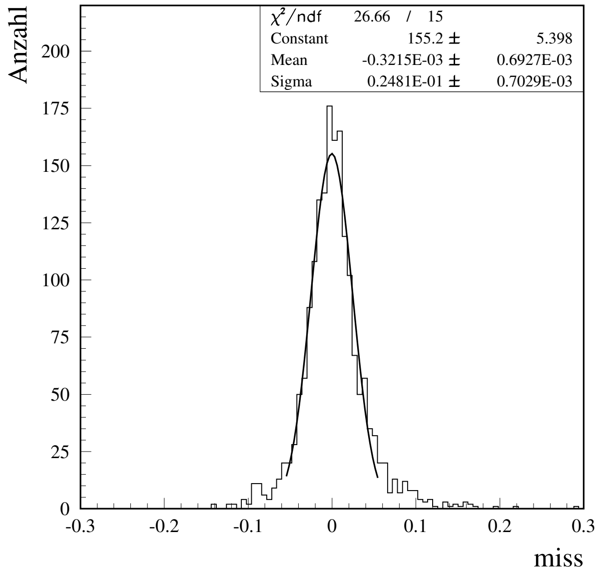


Abbildung 5.4: *Verteilung des miss-Parameters von Schauern mit Schauerauftreffpunkt bei* $100\,m$ *und Energien zwischen 0 und 10 TeV. Die Schauerneigung liegt bei* $(0.0°, 0.0°)$ *Es wurde eine Gaussverteilung angepaßt.*

5.5 Rekonstruktion basierend auf den Hillas-Parametern

Bei der konventionellen geometrischen Rekonstruktion kann aus den Momenten des Schauerbildes, wie in 2.2 geschildert, die Lage der langen Achse bestimmt werden. Deshalb läßt sich der miss-Parameter aus den Hillas-Parametern eines Einzelteleskops berechnen.

5.6 Vergleich der Rekonstruktionsmethoden

Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse der beiden Methoden verglichen.

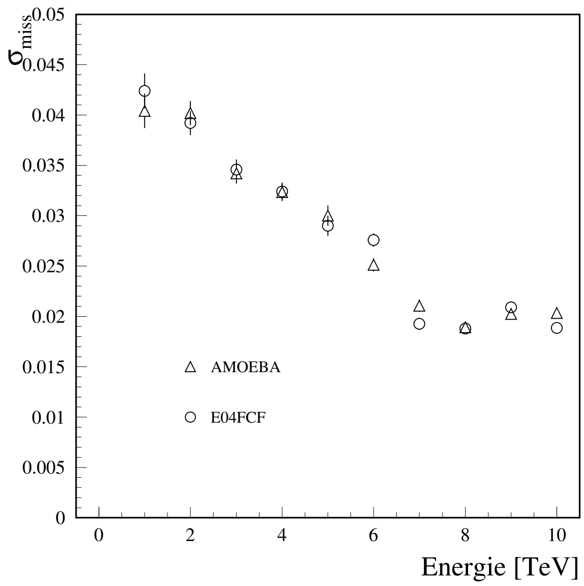


Abbildung 5.5: *Dargestellt ist die Auflösung in Abhängigkeit der Energie für 20 000 Ereignisse mit Schauerauftreffpunkt zwischen 0 und* $200\,m$ *sowie einer Schauerneigung von (*$0.0°, 0.0°$*).*

5.6.1 Untersuchung des Einflusses des Digitalisierungseffektes

Der Einfluß des Digitalisierungseffektes kann folgendermaßen überprüft werden:
Man wendet beide Methoden auf unverschmierte Bilder an. Bei der Erzeugung der Meßprofile wird also Punkt 4. in Abschnitt 5.1 ausgelassen. Dann simuliert man den Digitalisierungseffekt durch Verschiebung des Profils innerhalb eines Pixels. Die resultierenden Auflösungen sind ausschließlich durch diesen Effekt bedingt und können verglichen werden.

Abbildung 5.7 zeigt das Ergebnis in Abhängigkeit vom Schauerauftreffpunkt für den Fit (offene Kreise) und für die konventionelle Rekonstruktionsmethode (gefüllte Kreise). Im Falle des Fits ist der Einfluß des Digitalisierungseffektes bis zu einer Entfernung von $120\,m$ vernachlässigbar gering, danach nimmt er zu. Dagegen ist

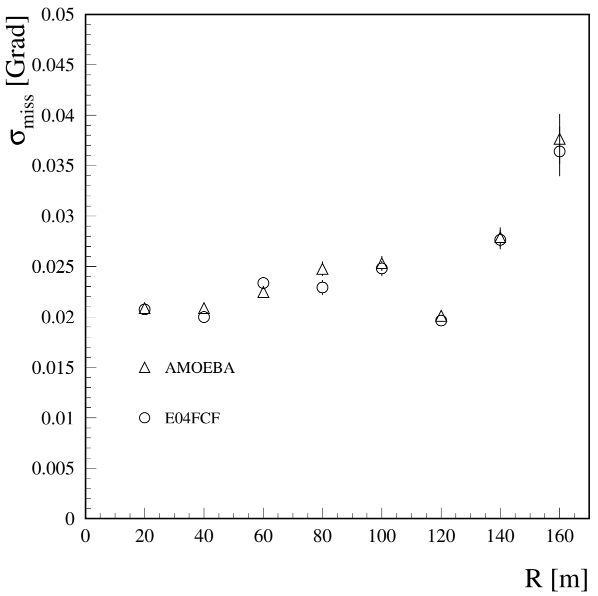


Abbildung 5.6: *Dargestellt ist die Auflösung in Abhängigkeit vom Schauerauftreffpunkt für 20 000 Ereignisse mit Schauerauftreffpunkt zwischen 0 und* $200\,m$*, einer Energie zwischen 0 und* $10\,TeV$ *sowie einer Schauerneigung von* $(0.0°, 0.0°)$

bei der konventionellen Rekonstruktion basierend auf den Hillas Parametern der Einfluß des Digitalisierungseffektes wesentlich stärker ausgeprägt. Daß der Digitalisierungseffekt bei größeren Abständen wachsende Bedeutung erhält, ist verständlich, da außerhalb des maximalen Cherenkov Radius die Lichtmenge innerhalb der Kamera rasch abnimmt. Dies hat zur Folge, daß die Richtung der longitudinalen Bildachse schlechter zu bestimmen ist. Es war zu erwarten, daß der Fit wesentlich unempfindlicher reagiert, denn der Digitalisierungseffekt wird bei der Berechnung der theoretischen Pixelamplitude automatisch berücksichtigt.

In Abbildung 5.8 ist die Auflösung in Abhängigkeit von der Energie für beide Methoden aufgetragen. Es zeigt sich dasselbe Verhalten.

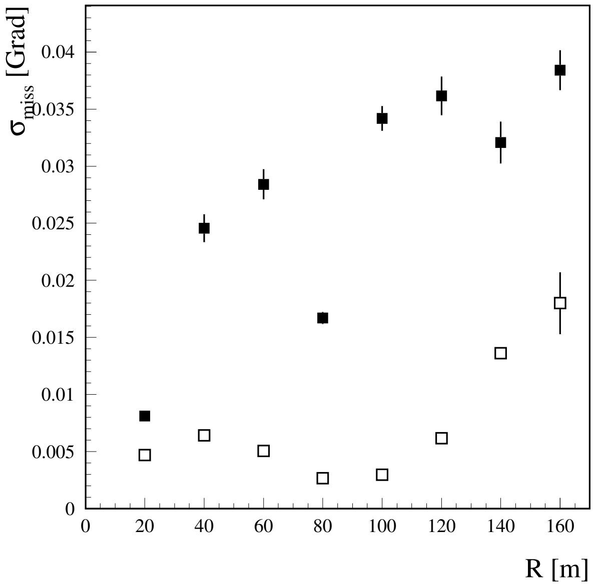


Abbildung 5.7: *Auflösung in Abhängigkeit vom Schauerauftreffpunkt für die geometrische Rekonstruktion (geschlossene Punkte) und den Fit (offene Kreise). Hier wurde bei der Erzeugung des Meßprofils nur der Digitalisierungseffekt berücksichtigt. Die Fluktuation der Photomultiplier wurde vernachlässigt.*

5.6.2 Richtungsauflösung

In diesem Abschnitt werden beide Rekonstruktionsmethoden auf Profile angewendet, die gemäß Kapitel 5.1 erzeugt und verschmiert wurden.
In Abbildung 5.9 wird die Auflösung für Schauer im Energiebereich zwischen 0 und 10 TeV und einer Schauerneigung von $(0.0°, 0.0°)$ in Abhängigkeit vom Schauerauftreffpunkt im Bereich zwischen 0 und $160m$ dargestellt. Wiederum zeigt sich eine Verschlechterung der Auflösung bei $120m$. Die Auflösung des Fits ist im Schnitt um 50% besser als die Auflösung der geometrischen Rekonstruktion.

Abbildung 5.10 zeigt die Verteilung des miss-Parameters für unterschiedliche Schauerabstände und für beide hier verwendeten Methoden. a) und b) beziehen sich auf den Fit mit Schauerabständen von $100m$ bzw. $140m$, c) und d) auf die geometrische Rekonstruktion mit den gleichen Schauerabständen. Die konventionelle Rekonstruk-

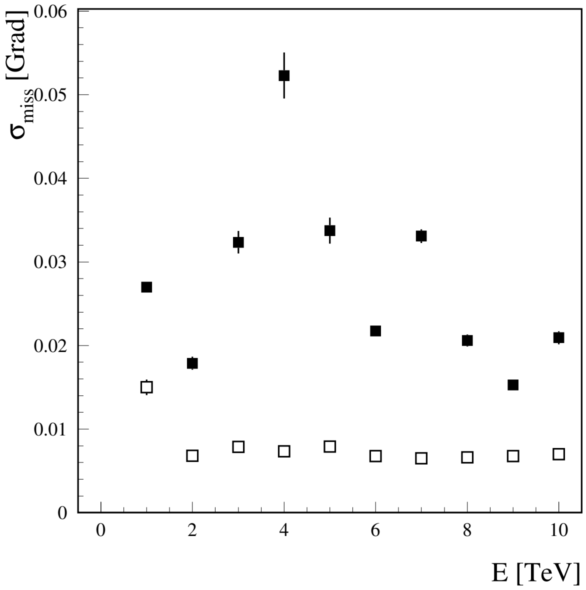


Abbildung 5.8: *Auflösung in Abhängigkeit von der Energie für die geometrische Rekonstruktion (geschlossene Punkte) und den Fit (offene Kreise). Hier wurde bei der Erzeugung des Meßprofils nur der Digitalisierungseffekt berücksichtigt. Die Fluktuation der Photomultiplier wurde vernachlässigt.*

tion ist um ca. 35% schlechter.

Das gleiche Ergebnis zeigt Abbildung 5.11. Auch hier zeigt der Fit eine Verbesserung um ca. 45%. Die Auflösung verbessert sich in beiden Fällen bei höheren Energien. Das ist verständlich, da mit zunehmenden Energien die Cherenkov Licht Intensität und somit auch der Informationsgehalt wächst.

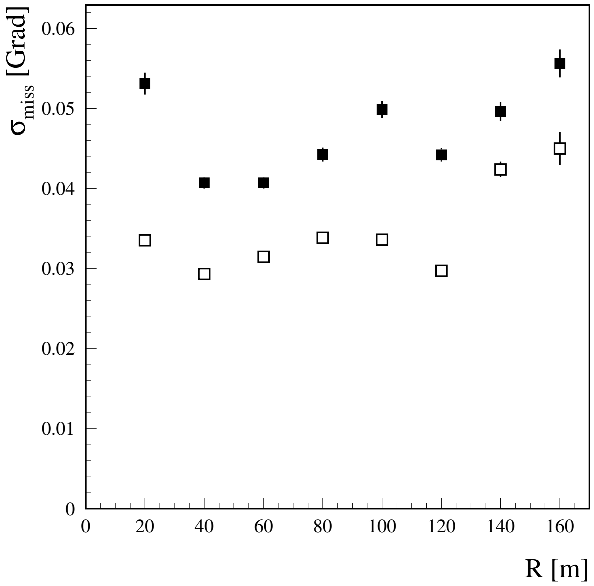


Abbildung 5.9: *Dargestellt ist die Auflösung für Schauer mit einer Schauerneigung von* $(0.0°, 0.0°)$ *im Energiebereich zwischen 0 und 10 TeV in Abhängigkeit vom Schauerauftreffpunkt in einem Bereich zwischen 0 und* 160 *m. Die offenen Kreise beziehen sich auf den Fit, die geschlossenen auf die geometrische Rekonstruktion.*

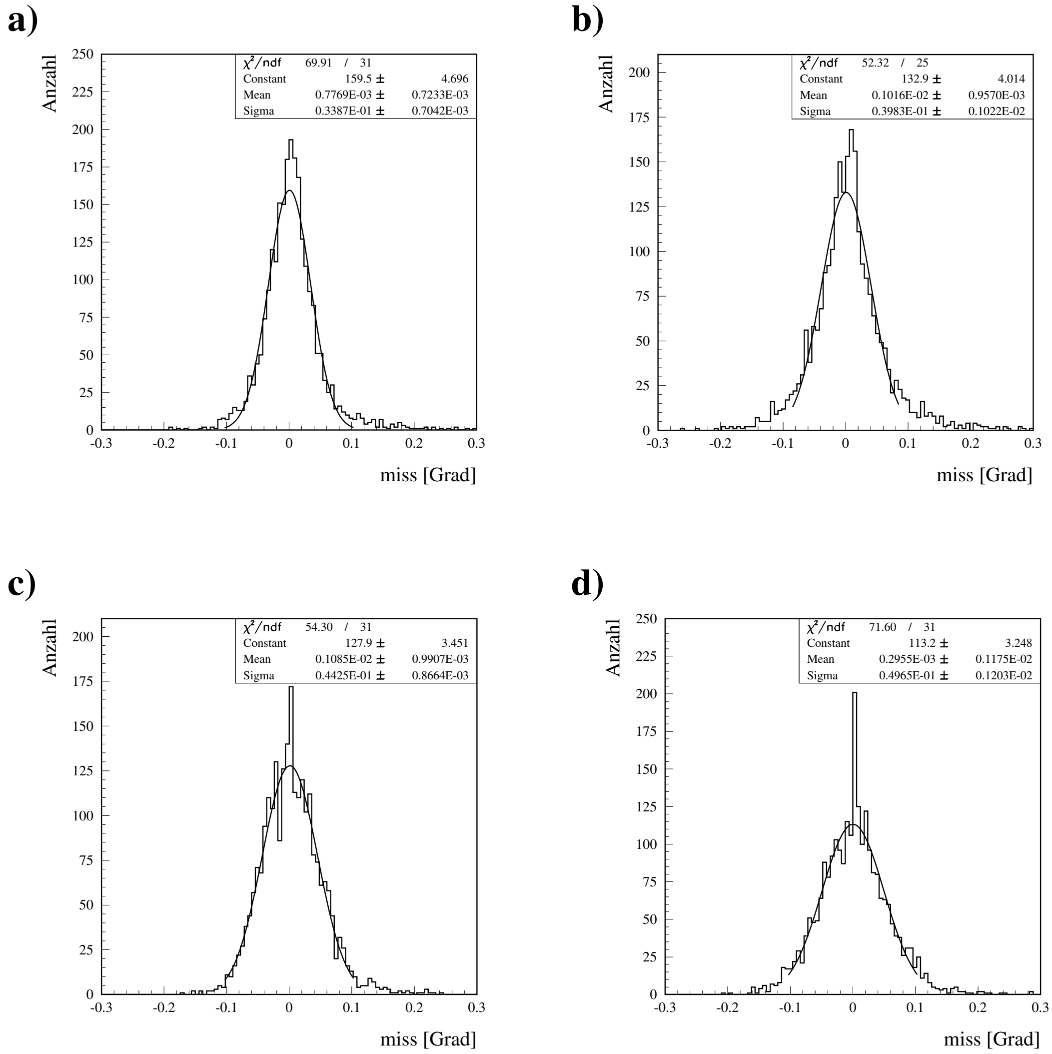


Abbildung 5.10: *Dargestellt ist die Verteilung des miss-Parameters bei unterschiedlichen Schauerabständen. a) und b) beziehen sich auf den Fit bei Schauerabständen von* $100\,m$ *bzw.* $140\,m$*, c) und d) auf die geometrische Rekonstruktion bei Schauerabständen von* $100\,m$ *bzw.* $140\,m$*.*

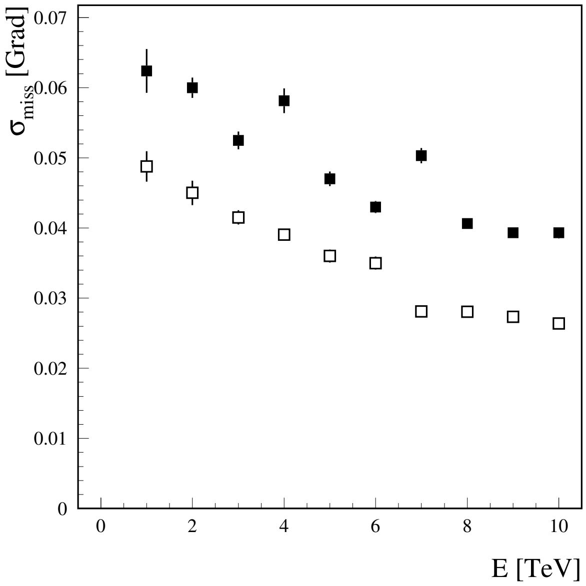


Abbildung 5.11: *Dargestellt ist die Auflösung für Schauer der Schauerneigung* $(0.0°, 0.0°)$ *und Schauerauftreffpunkten zwischen 0 und* $160\,m$ *in Abhängigkeit von der Energie im Bereich zwischen 0 und* $10\,TeV$*. Die offenen Punkte beziehen sich auf den Fit, die geschlossenen auf die geometrische Rekonstruktion.*

Kapitel 6

Anwendung des Fits auf Monte Carlo Daten eines 4 Teleskopsystems

Während den Voruntersuchungen eine grobe Simulation eines Einzelteleskopsystems zugrunde lag, soll im folgenden das Fitverfahren auf Monte Carlo Daten eines 4 Teleskopssystems angewendet werden. Ziel dieser Untersuchungen ist eine realistische Abschätzung der Vor- und Nachteile dieser Methode unter Bedingungen, bei denen die theoretischen Werte, die in der Rekonstruktion

wiedergefunden werden sollen, im Voraus bekannt sind. In den Kapiteln werden folgende Definitionen der Auflösung verwendet.

Definition der Auflösung

1. Betrachtet man die Abweichungen vom wahren Wert $(W_{x,MC}, W_{y,MC})$ in x- und y-Richtung, so weisen diese nahezu eine Normalverteilung auf. Es wird der Wert als Auflösung verwendet, der der Breite der Gaussverteilung entspricht (σ_x, σ_y).

2. Betrachtet man die Abweichung der rekonstruierten Werte $(W_{x,rek}, W_{y,rek})$ von den wahren Werten $(W_{x,MC}, W_{y,MC})$,

$$\delta W = \sqrt{(W_{x,rek} - W_{x,MC})^2 + (W_{y,rek} - W_{y,MC})^2}$$

so wird der Wert verwendet, bei dem 68% der Einträge kleiner sind $(\sigma_{68\%})$.

3. Betrachtet man die quadratische Abweichung der rekonstruierten Werte $(W_{x,rek}, W_{y,rek})$ von den wahren Werten $(W_{x,MC}, W_{y,MC})$

$$\Delta W = (W_{x,rek} - W_{x,MC})^2 + (W_{y,rek} - W_{y,MC})^2,$$

so wird an die Differenzverteilung die Funktion $p_1/(2p_2^2)\exp(-1/2(\Delta W/p_2^2)$ angepaßt. Der Parameter p_2 gibt die Breite der zweidimensionalen Normalverteilung um den wahren Wert an $(\sigma_{x,y})$.

Wenn $\sigma_x = \sigma_y$, dann gilt auch $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{x,y}$. Zwischen $\sigma_{68\%}$ und $\sigma_{x,y}$ besteht im Falle einer reinen Normalverteilung der folgende Zusammenhang:

$$\sigma_{68\%} = 1.51 \cdot \sigma_{x,y} \tag{6.1}$$

6.1 Einfluß der Startbedingungen auf die Güte des Fits

Die Untersuchungen im folgenden Abschnitt verwenden Monte Carlo Daten (MC) im Energiebereich zwischen 0.5 und $5\,TeV$. Um die Abhängigkeit des Fits von den Startwerten genauer zu untersuchen, werden die Startwerte zweier Fitparameter ausgehend vom wahren Wert variiert. Die restlichen Parameter erhalten die MC-Werte als Startwerte. Der Minimierung wird wie üblich in Abhängigkeit von der Schauerneigung, des Schauerauftreffpunktes, der Energie sowie der Schauerhöhe durchgeführt.

Variation des Schauerabstandes

Zur Überprüfung der Abhängigkeit des Fits von den Startkoordinaten des Schauerauftreffpunktes werden diese in x- und y- Richtung variiert. Die Werte werden beliebig auf einem Kreis mit Radius δr Meter gewürfelt (siehe Abbildung 6.1) d.h. für den neuen Wert $(R_{x,start}, R_{y,start})$ gilt:

$$\delta r = \sqrt{(R_{x,start} - R_{x,MC})^2 + (R_{y,start} - R_{y,MC})^2} \tag{6.2}$$

wobei $R_{x,MC}, R_{y,MC}$, die Monte Carlo Werte sind.
Als Maß für die Güte des Fits wurde die Anzahl der Ereignisse bestimmt, die unter den gegebenen Bedingungen ein $\Delta R \leq 10m$ aufweisen. ΔR ist definiert als

$$\Delta R = \sqrt{(R_{x,rek} - R_{x,MC})^2 + (R_{y,rek} - R_{y,MC})^2} \tag{6.3}$$

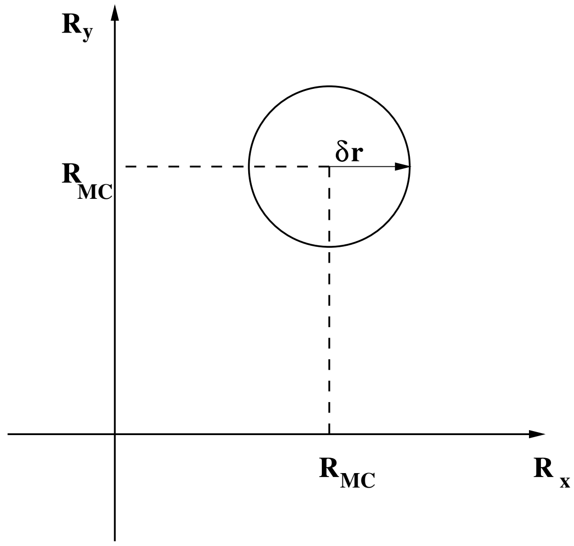


Abbildung 6.1: *Variation des Schauerauftreffpunktes zur Überprüfung der Startwertabhängigkeit. Für den Startwert* $(R_{x,MC}, R_{y,MC})$ *gilt:* $\delta r = \sqrt{(R_{x,start} - R_{x,MC})^2 + (R_{y,start} - R_{y,MC})^2}$

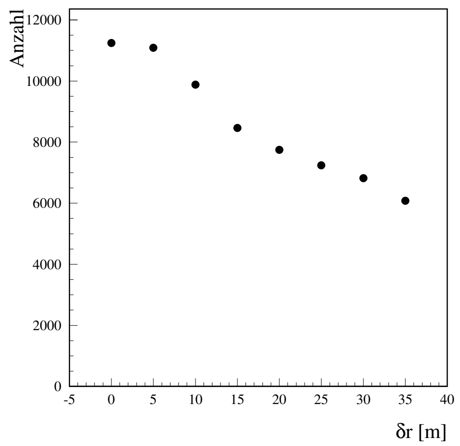


Abbildung 6.2: *Anzahl der Ereignisse in Abhängigkeit von* δr*, die der Fit von 12832 Ereignissen mit einer Abweichung unter* $10\,m$ *rekonstruiert hat.*

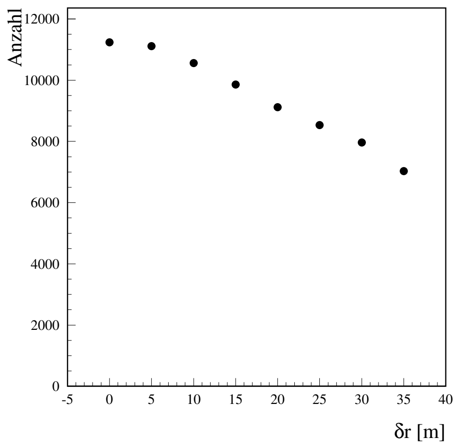


Abbildung 6.3: *Anzahl der Ereignisse in Abhängigkeit von δr, die der Fit von 12832 Ereignissen mit einer Abweichung unter $0.1°$ wiedergefunden hats.*

$R_{x,rek}$ und $R_{y,rek}$ stellen die rekonstruierten Schauerauftreffpunktkoordinaten dar. In Abbildung 6.2 ist die Anzahl dieser Ereignisse in Abhängigkeit von δr (siehe Gleichung 6.2) aufgetragen. Wenn der Startwert $20\,m$ vom MC-Wert entfernt ist, nimmt die Anzahl der Ereignisse, im Vergleich zu $\delta r = 0\,m$ um 30% ab.
Der Grund hierfür liegt am Verhalten der χ^2-Funktion. Diese hat, wie in Kapitel 4.2 beschrieben, ein absolutes Minimum an der Stelle $(R_{x,MC}, R_{y,MC}, \Theta_{x,MC}, \Theta_{y,MC}, E_{MC}, q_{MC})$. Sie steigt mit zunehmender Entfernung zu diesem Punkt an, um dann ein Maximum zu erreichen. Danach bleibt der Funktionswert der χ^2-Funktion konstant. Der Abstand zwischen Minimum und Maximum ist abhängig von den Bildparametern *width* und *length*, d.h. von der Fitregion.
Liegt der Startwert nun im konstanten äußeren Bereich, so ist es nicht mehr möglich eine Minimierung durchzuführen. Der Fit divergiert und die ermittelten Parameter sind physikalisch unsinnig.

Definiert man die Auflösung $\sigma_{R,68\%}$ als denjenigen Wert, unterhalb dem 68% der Ereignisse kleinere ΔR-Werte aufweisen (Definition 3), so sieht man anhand von Abbildung 6.4, daß sich diese bei einer Variation des Startwertes mit $\delta r = 0\,m$ bis $\delta r = 30\,m$ von $6\,m$ auf $15.5\,m$ verschlechtert.

In Abbildung 6.3 ist die Anzahl der Ereignisse, die mit einer Abweichung zwischen

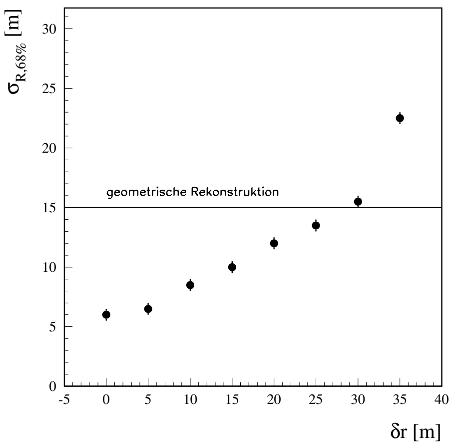


Abbildung 6.4: *Dargestellt ist die Abhängigkeit der Auflösung des Schauerauftreffpunktes in Abhängigkeit von δr. Die Gerade gibt den Wert der Auflösung der geometrischen Rekonstruktion an.*

$0°$ und $0.1°$ vom MC-Wert wiedergefunden werden, in Abhängigkeit von δr (siehe Gleichung 6.2) aufgetragen. Die Anzahl der Ereignisse nimmt bei Startwerten mit $\delta r = 30\,m$ um 20%, im Vergleich zu Startwerten mit $\delta r = 0\,m$ ab.

Abbildung 6.5 zeigt, daß sich die Auflösung der Schauerrichtung $\sigma_{\Theta,68\%}$ von $0.06°$ auf $0.115°$ verschlechtert, wenn die Abweichung n des Startwertes vom wahrem Wert von $0m$ auf $30m$ steigt.
Abschließend ist anzumerken, daß der Fit bis zu einem Abstand von $30\,m$ zwischen Startwert und Schauerauftreffpunkt eine bessere Auflösung als die geometrische Rekonstruktion liefert.

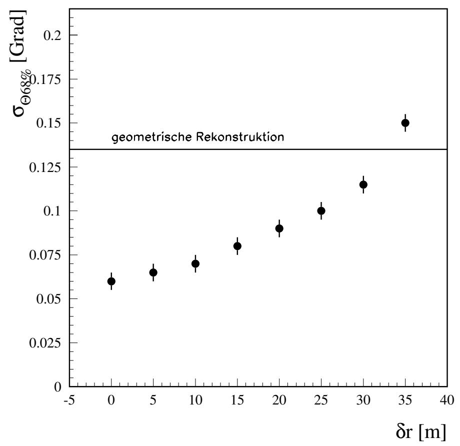


Abbildung 6.5: *Dargestellt ist die Abhängigkeit der Auflösung der Schauerrichtung in Abhängigkeit vom Radius des Kreises δr. Die Gerade gibt den Wert der Auflösung der geometrischen Rekonstruktion an.*

Variation der Schauerrichtung

Die Abhängigkeit des Ergebnisses des Fits vom Startwert der Schauerrichtung wird auf die gleiche Weise untersucht, wie es für den Schauerauftreffpunkt beschrieben wurde.
Die Schauerrichtung wird auf einem Kreis um den MC-Wert variiert, so daß gilt:

$$\delta\theta = \sqrt{(\Theta_{x,start} - \Theta_{x,MC})^2 + (\Theta_{y,start} - \Theta_{y,MC})^2} \tag{6.4}$$

$\delta\theta$ wurde zwischen $0°$ und $0.57°$ variiert. In Abbildung 6.6 ist die Anzahl der Ereignisse, die eine Abweichung vom wahren Wert kleiner als $0.1°$ haben, als Funktion der Abweichung $\delta\theta$ dargestellt. Man erkennt, daß die Anzahl um ca. 15% zwischen $0°$ und $0,23°$ abnimmt. Die Auflösung (siehe Abbildung 6.9) wird um ca. 20% schlechter bei einer Variation des Startwertes der Schauerrichtung vom MC-Wert um $\delta\theta = 0.23°$.

Die gleiche Abweichung der Schauerrichtung führt bei der Auflösung des Schauerauftreffpunktes zu einer Verschlechterung um ca. 30% (Abbildung 6.8) und zu einer Abnahme der Anzahl der Ereignisse, die mit einer Abweichung unter $10m$ wiedergefunden werden, (Abbildung 6.7) von ca. 20%.

Der Fit liefert bessere Ergebnisse als die geometrische Rekonstruktion bei einer Variation der Startwerte der Schauerneigung bis zu $0.4°$.

6.2 Wahl der Startbedingungen

Die Startwerte für Schauerneigung und -richtung erhält man aus der geometrischen Rekonstruktion, die Energie wird durch die Energierekonstruktion, wie in Kapitel 3.4 beschrieben, bestimmt. Die Schauerhöhe wird auf 6.5 km über N.N. festgelegt, was einen Skalierungsfaktor q von eins entspricht. Es werden nur Schauer verwendet, die einen Schauerabstand kleiner $250\,m$ vom jeweiligen Teleskop haben, und die in mindestens zwei Teleskopen Gesamtamplituden größer als $40\,ph.e$ aufweisen.

6.3 Wahl der Fitregion

Es wird die Fitregion, die bereits im Kapitel 4.2.2 beschrieben wurde, verwendet. Zur Durchführung des Fits werden alle diejenigen Photomultiplier, die innerhalb einer Ellipse mit den Halbachsen $5 \cdot length$ und $5 \cdot width$ liegen, verwendet. Um auch Schauerabbilder mit $width \approx 0$ oder $length \approx 0$ zu berücksichtigen zu können, wird eine untere Grenze von $width = 0.05°$ und von $length = 0.25°$ angesetzt.

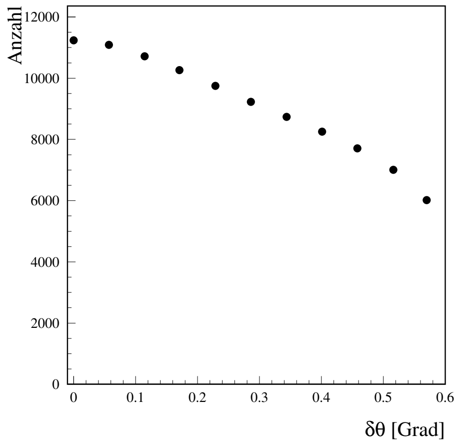


Abbildung 6.6: *Anzahl der Ereignisse zwischen* $\Delta\Theta = 0°$ *und* $0.1°$ *in Abhängigkeit von* $\delta\theta$.

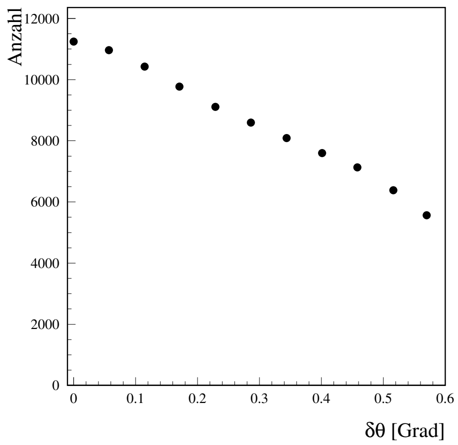


Abbildung 6.7: *Anzahl der Ereignisse, die der Fit von 12832 Ereignissen mit einer Abweichung kleiner als* $10\,m$ *vom MC-Wert des Schauerauftreffpunktes rekonstruiert hat, in Abhängigkeit von* $\delta\theta$

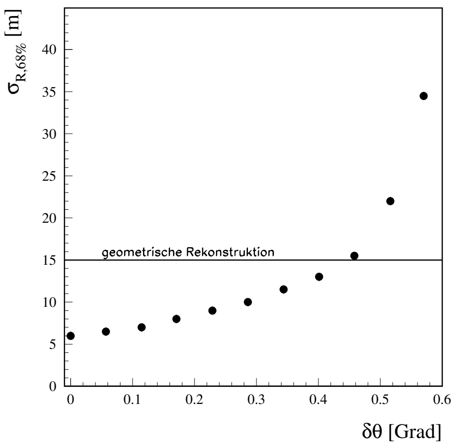


Abbildung 6.8: *Dargestellt ist die Abhängigkeit der Auflösung des Schauerauftreffpunktes in Abhängigkeit von $\delta\theta$. Die Gerade gibt den Wert der Auflösung der geometrischen Rekonstruktion an.*

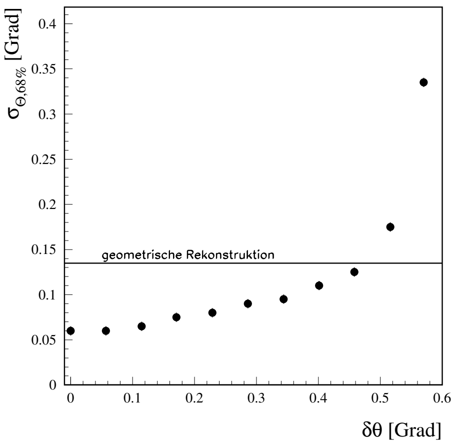


Abbildung 6.9: *Dargestellt ist die Abhängigkeit der Auflösung der Schauerrichtung in Abhängigkeit von $\delta\theta$. Die Gerade gibt den Wert der Auflösung der geometrischen Rekonstruktion an.*

Methode	$\sigma_{R,x}$	$\sigma_{R,y}$	$\sigma_{R,68\%}$	$\sigma_{R,68\%}/\sigma_{R,x,y}$
Fit	$(4.73 \pm 0.05)m$	$(4.93 \pm 0.06)m$	$(10.50 \pm 0.5)m$	2.17 ± 0.13
Geo	$(5.81 \pm 0.09)m$	$(6.14 \pm 0.1)m$	$(15.0 \pm 0.5)m$	2.51 ± 0.13

Tabelle 6.1: *Auflösung des Schauerauftreffpunktes in x- und y-Richtung ($\sigma_{R,x}$, $\sigma_{R,y}$), sowie die 68% Auflösung ($\sigma_{R,68\%}$) und das Verhältnis der projizierten Auflösung zur 68% Auflösung.*

6.4 Weitere einschränkende Bedingungen

Schauer mit einem Schauerabstand über $250m$ und mit einer Gesamtamplitude unter 40 ph.e werden nicht verwendet.

6.5 Vergleich der rekonstruierten Schauerparameter aus geometrischer Rekonstruktion und Fit

Schauerabstand

In Abbildung 6.10 ist die Anzahl der Ereignisse über die Differenz zwischen dem rekonstruierten Schauerauftreffpunkt ($R_{x,rek}, R_{y,rek}$) und dem wahren Wert ($R_{x,MC}, R_{y,MC}$) aufgetragen, jeweils für x- und die y-Richtung. Die Abweichung weist keine systematische Verschiebung auf, sie ist nahezu normalverteilt. Die Ausläufer an den Fußpunkten rühren von schlecht rekonstruierten Ereignissen her. Meistens handelt es sich hierbei um lichtschwache Bilder, die zu großen Schauerabständen gehören.
Abbildung 6.11 zeigt die Abweichung $\Delta R = \sqrt{(R_{x,rek} - R_{x,MC})^2 + (R_{y,rek} - R_{y,MC})^2}$. Als Auflösung wird der Wert genommen, bei dem 68% der Ereignisse kleinere Abweichungen aufweisen.
Bei der geometrischen Rekonstruktion beträgt $\sigma_{R,68\%} = 15.5\,m$. Beim Fit liegt $\sigma_{R,68\%}$ bei $10.5\,m$. Man erhält also eine Verbesserung von ca. 45%.
In Tabelle 6.5 ist die Aufloung ($\sigma_{R,x}, \sigma_{R,y}$) in x- und y-Richtung angegeben sowie das Verhältnis der 68%-Auflösung $\sigma_{R,68\%}$ zur projizierten Auflösung ($\sigma_{x,y}$). Die Bedingung $\sigma_{68\%} = 1.51 \cdot \sigma_{x,y}$, die bei einer reinen Normalverteilung zu erwarten wäre ist nicht erfüllt. Der Grund ist, wie oben beschrieben die schwierigere Rekonstruktion lichtschwacher Ereignisse. Die Ergebnisse des Fits sind etwas besser normalverteilt als die Ergebnisse der geometrischen Rekonstruktion.

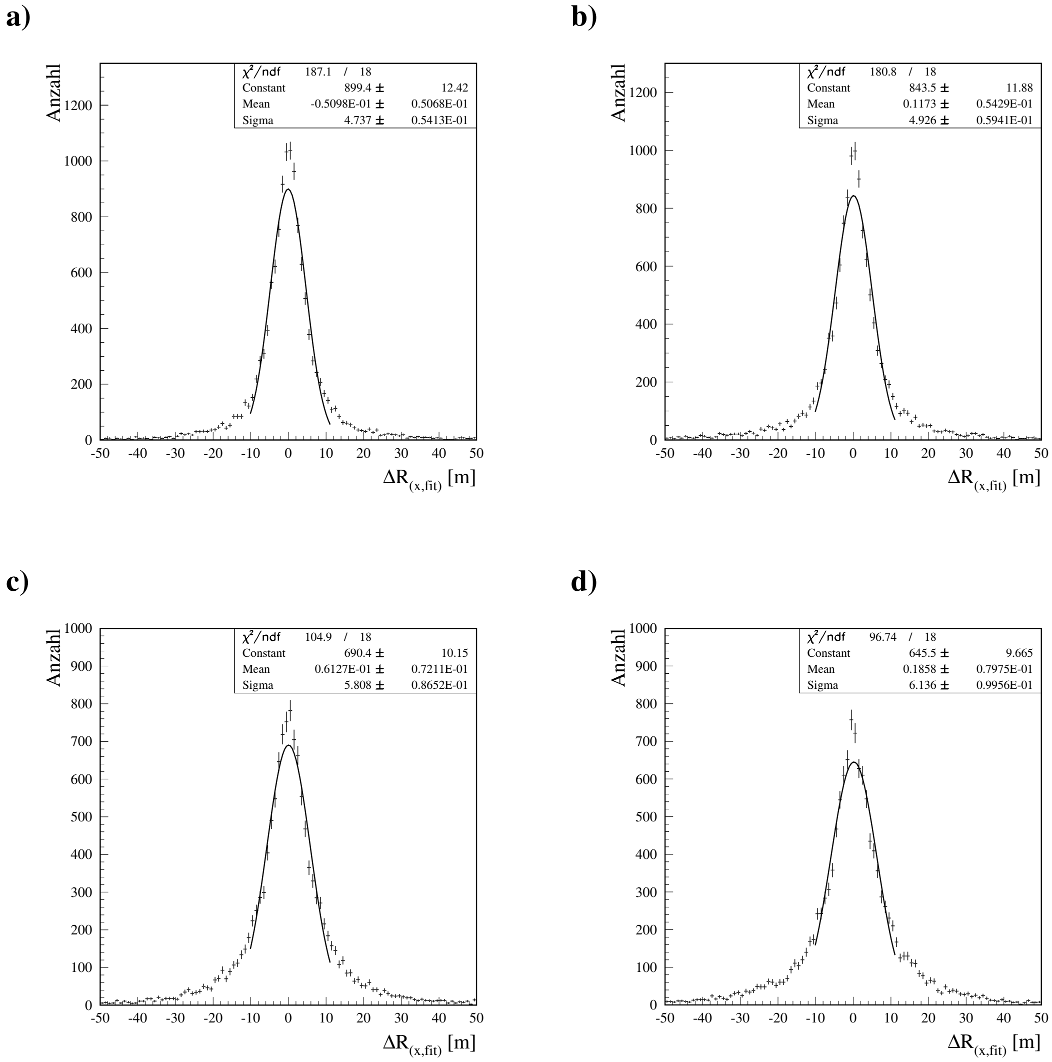


Abbildung 6.10: *Aufgetragen ist die Abweichung des rekonstruierten Schauerabstandes vom MC Wert jeweils für die x- und die y-Richtung. Es wurden Schauer des Energiebereiches zwischen 0.5 TeV und 5 TeV mit Zenitwinkel Null Grad verwendet. a) und b) beziehen sich auf den Fit, c) und d) auf die geometrische Rekonstruktion. Es wurde jeweils eine Gaussfunktion an die Daten angepaßt.*

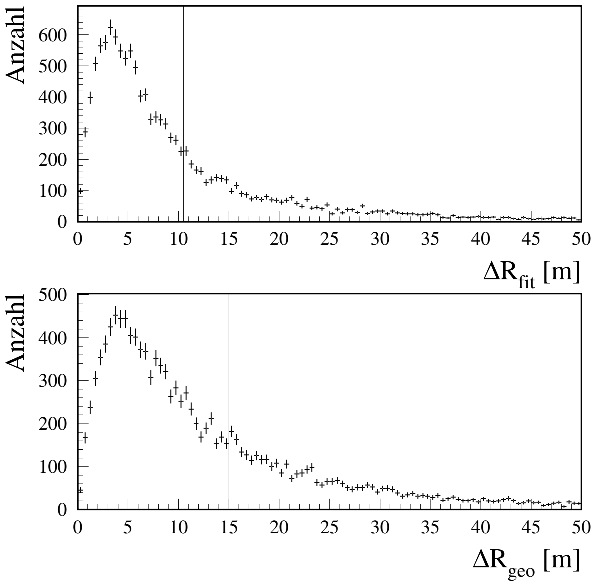


Abbildung 6.11: *Aufgetragen ist die Anzahl der Ereignisse über die radiale Abweichung des wahren Schauerauftreffpunktes vom rekonstruierten. Es wurden Schauer des Energiebereiches zwischen 0.5 TeV und 5 TeV mit einem Zenitwinkel von Null Grad verwendet. Eingezeichnet ist die Stelle, an der 68% der Einträge links davon liegen. a) ist das Ergebnis des χ^2-Fits. Die Auflösung $\sigma_{R,68\%}$ liegt bei 10,5m b) ist das Ergebnis der geometrischen Rekonstruktion. Die Auflösung liegt bei 15m.*

Schauerrichtung

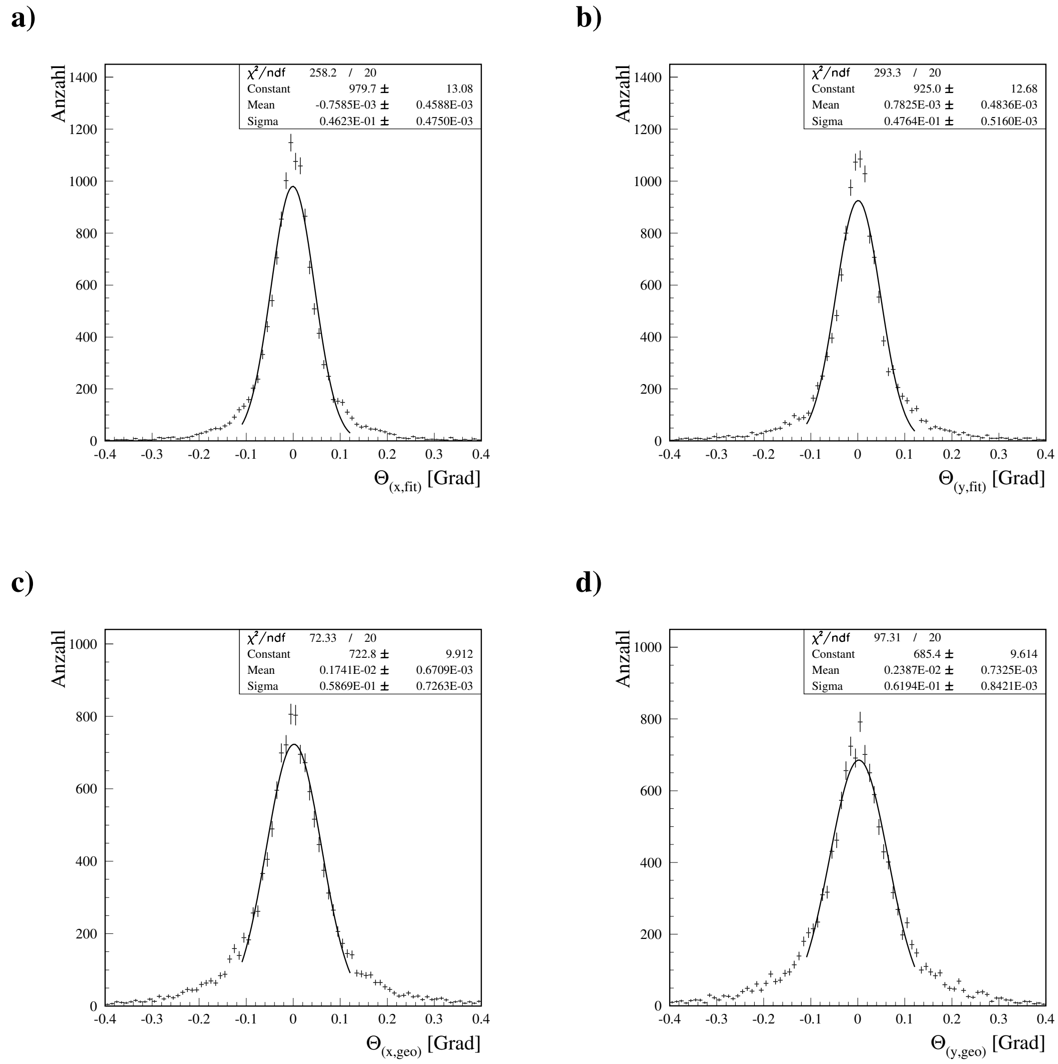


Abbildung 6.12: *Aufgetragen ist die Differenz zwischen rekonstrierter und wahrer Schauerrichtung in x- und y-Richtung. Es wurden Schauer des Energiebereiches zwischen* $0.5\,TeV$ *und* $5\,TeV$ *und Zenitwinkel* $0°$ *verwendet. a) und b) beziehen sich auf den Fit, c) und d) auf die geometrische Rekonstruktion. Es wurde jeweils eine Gaussfunktion an die Daten angepaßt.*

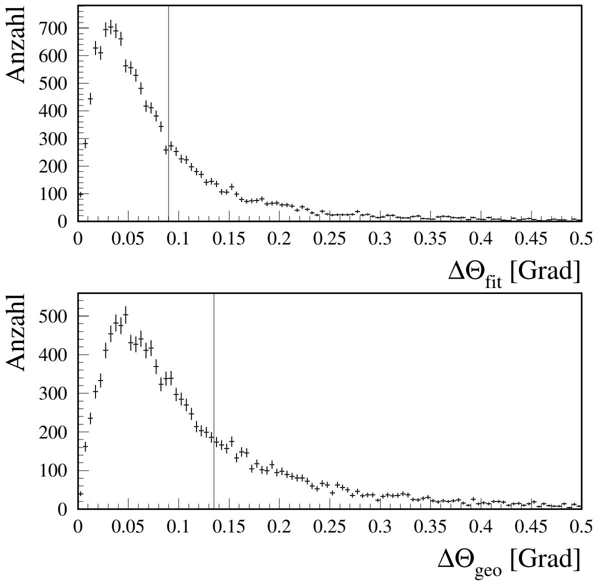


Abbildung 6.13: *Aufgetragen ist die Anzahl der Ereignisse über die radiale Abweichung $\Delta\Theta$ der rekonstruierten von der wahren Schauerrichtung. Es wurden Schauer des Energiebereichs zwischen $0.5\,TeV$ und $5\,TeV$ mit einem Zenitwinkel von Null Grad verwendet. Eingezeichnet ist die Stelle, an der 68% der Einträge links davon liegen. a) zeigt das Ergebnis des χ^2-Fits. Die Auflösung liegt bei $\sigma_{\Theta,68\%} = 0.09°$. b) zeigt das Ergebnis der geometrischen Rekonstruktion. Die Auflösung beträgt in diesem Fall $\sigma_{\Theta,68\%} = 0.135°$.*

In Abbildung 6.12 ist die Abweichung der rekonstruierten Schauerrichtung $(\Theta_{x,rek}, \Theta_{y,rek})$ von der wahren $(\Theta_{x,MC}, \Theta_{y,MC})$ aufgetragen. Wiederum zeigt sich keine systematische Abweichung.
Abbildung 6.13 zeigt die Winkeldifferenz $\Delta\Theta$ zwischen wahrer Schauerrichtung und rekonstruierter. Als Richtungsauflösung erhält man für die geometrische Rekonstruktion 0.135° und für den Fit 0.09°. Dies entspricht einer Verbesserung um 50%.
In Tabelle 6.5 ist die Aufloüng $(\sigma_{\Theta,x}, \sigma_{\Theta,y})$ in x- und y-Richtung angegeben sowie das Verhältnis der 68%-Auflösung $\sigma_{\Theta,68\%}$ zur projizierten Auflösung $(\sigma_{\Theta,x,y})$. Die Bedingung $\sigma_{68\%} = 1.51 \cdot \sigma_{x,y}$, die bei einer reinen Nomalverteilung zu erwarten wäre ist nicht erfüllt. Der Grund ist, wie oben beschrieben die schwierigere Rekonstruktion lichtschwacher Ereignisse. Die Ergebnisse des Fits sind etwas besser normalverteilt

Methode	$\sigma_{\Theta,x}$	$\sigma_{\Theta,y}$	$\sigma_{\Theta,68\%}$	$\sigma_{\Theta,68\%}/\sigma_{\Theta,x,y}$
Fit	$(0.046 \pm 0.001)^\circ$	$(0.048 \pm 0.001)^\circ$	$(0.09 \pm 0.005)^\circ$	1.91 ± 0.147
Geo	$(0.059 \pm 0.001)^\circ$	$(0.062 \pm 0.001)^\circ$	$(0.135 \pm 0.005)^\circ$	2.23 ± 0.187

Tabelle 6.2: *Auflösung des Schauerauftreffpunktes in x- und y-Richtung ($\sigma_{\Theta,x}$, $\sigma_{\Theta,y}$), sowie die 68% Auflösung ($\sigma_{\Theta,68\%}$) und das Verhältnis der projizierten Auflösung zur 68% Auflösung.*

als die Ergebnisse der geometrischen Rekonstruktion.

Energie

Die relative Energieauflösung ist in Abbildung 6.14 dargestellt. Sie beträgt 30%. Außerdem erkennt man eine leicht asymetrische Form, die von überschätzten Energien herrührt.

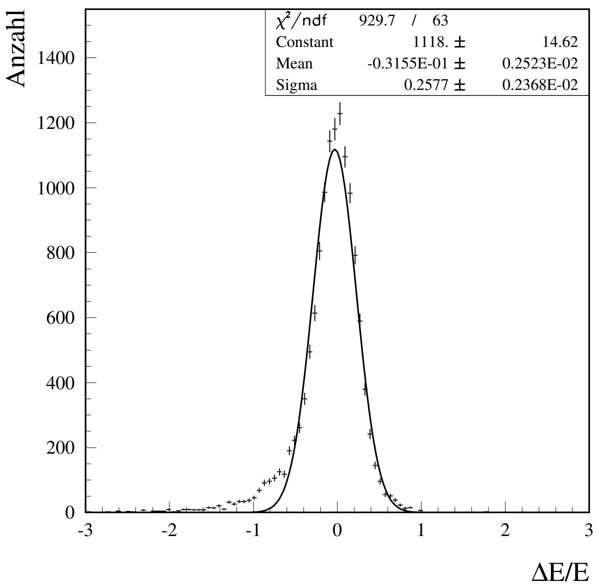


Abbildung 6.14: *Aufgetragen ist die relative Energieauflösung $\Delta E/E$ in einem Energiebereich zwischen 0,5 und 5 TeV*

6.6 Auflösung als Funktion der Energie

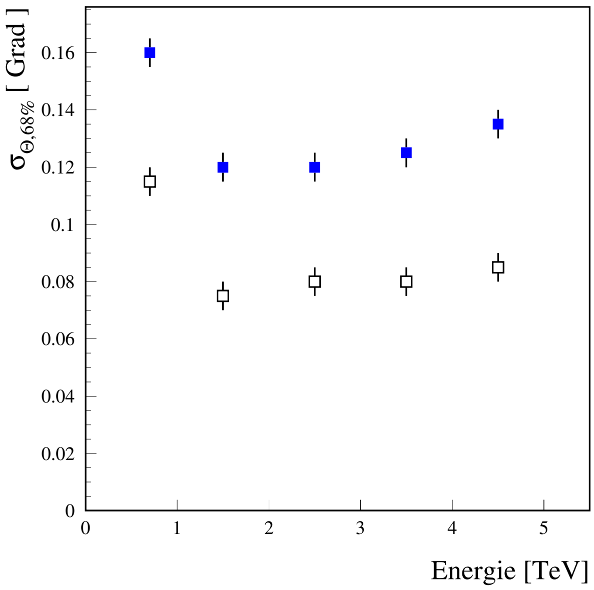


Abbildung 6.15: *Dargestellt ist die Auflösung der Schauerrichtung als Funktion der Energie. Es wurden Schauer mit Zenitwinkel von Null Grad benutzt. Die geschlossenen Quadrate sind die Werte für die geometrische Rekonstruktion, die offenen für den Fit.*

Abbildung 6.15 zeigt die Auflösung der Schauerrichtung als Funktion der Energie. Die geschlossenen Quadrate sind die Werte für die geometrische Rekonstruktion, die offenen für den Fit.
Es wurde die Auflösung $\sigma_{\Theta,68\%}$ der Schauerrichtung in Energieintervallen $\Delta E = 1TeV$ bestimmen und in die Mitte des Energieintervalls aufgetragen. Beide Rekonstruktionsmethodem verhalten sich ähnlich. Die Auflösung verbessert sich zunächst, um dann bei größeren Energien (ab 3 TeV) wieder etwas schlechter zu werden. Diese Verschlechterung wird durch Bilder hervorgerufen, die teilweise außerhalb der Kamera liegen.
Dieser Effekt ist bei der geometrischen Rekonstruktion stärker ausgeprägt ($0.1°/1\,[TeV]$) als beim Fit mit nur $0.025°/1\,[TeV]$. Insgesamt rekonstruiert der Fit die Schauerrichtung um ca. 35% besser.

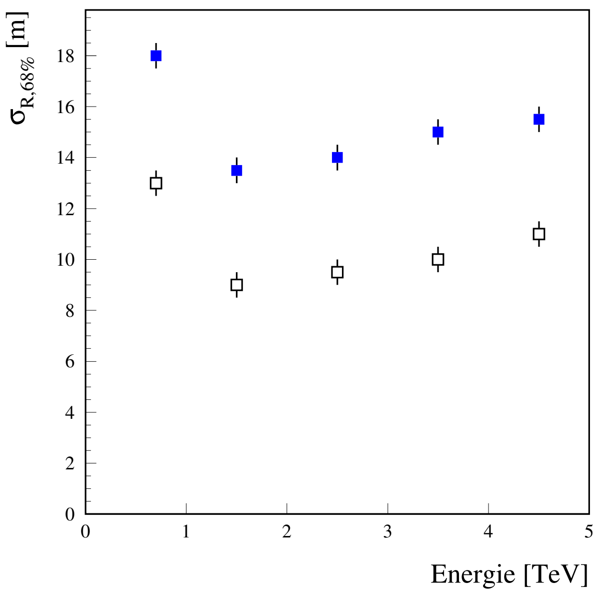


Abbildung 6.16: *Dargestellt ist die Auflösung des Schauerauftreffpunktes als Funktion der Energie. Es wurden Schauer mit Zenitwinkel von Null Grad benutzt. Die geschlossenen Quadrate sind die erhaltenen Werte für die geometrische Rekonstruktion, die offenen für den Fit.*

Abbildung 6.16 zeigt die Auflösung des Schauerauftreffpunktes als Funktion der Energie. Die geschlossenen Quadrate sind die Werte für die geometrische Rekonstruktion, die offenen für den Fit.
Wiederum ist der Verlauf der Aufösung beider Methoden ähnlich. Der Fit weist gegenüber der geometrischen Rekonstruktion eine Verbesserung um 50% auf.

6.7 Auflösung als Funktion der Anzahl der Teleskope

Abbildung 6.17 zeigt die Auflösung der Schauerrichtung $\sigma_{\Theta,68\%}$ in Abhängigkeit von der Anzahl der getriggerten Teleskope. Die geschlossenen Quadrate sind die Werte für die geometrische Rekonstruktion, die offenen für den Fit.

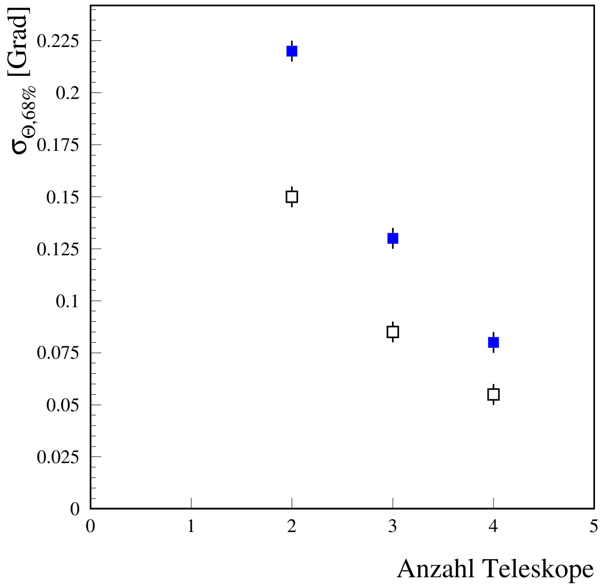


Abbildung 6.17: *Auflösung der Schauerrichtung in Abhängigkeit der getriggerten Teleskope. Die geschlossenen Quadrate sind die Werte für die geometrische Rekonstruktion, die offenen für den Fit.*

Wie zu erwarten, verbessert sich die Auflösung mit zunehmender Anzahl der Teleskope, da man einerseits bessere Startwerte aus der geometrischen Methode erhält und andererseits mehr Informationen über den Schauer zur Verfügung hat. Bei 4 Teleskopen erhält man einen um ca. 70% besseren Wert als bei 2 Teleskopen. Vergleicht man beide Methoden, zeigt der Fit eine Verbesserung um ca. 45%.
Abbildung 6.18 zeigt die Auflösung des Schauerauftreffpunktes in Abhängigkeit von der Anzahl der getriggerten Teleskope. Die geschlossenen Quadrate sind die Werte für die geometrische Rekonstruktion, die offenen für den Fit.
Die Auflösung verbessert sich wiederum mit der Anzahl der getriggerten Teleskope um ca 70%. Die Verbesserung des Fits im Vergleich zur geometrischen Methode beträgt ca. 45%.

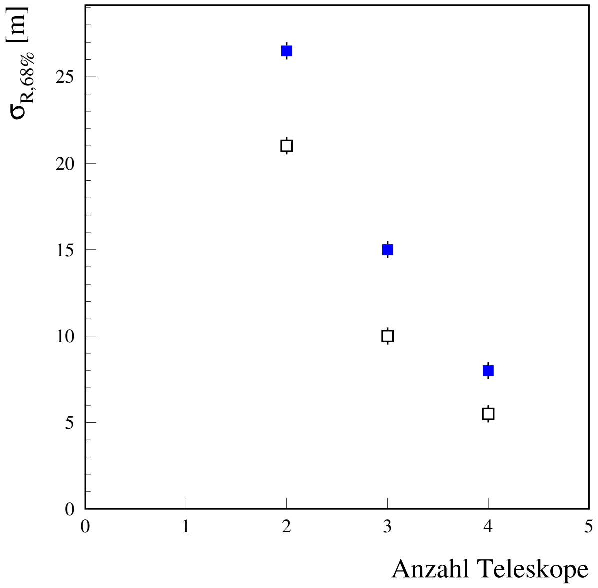


Abbildung 6.18: *Auflösung der Schauerauftreffpunktes in Abhängigkeit der getriggerten Teleskope. Die geschlossenen Quadrate sind die Werte für die geometrische Rekonstruktion, die offenen für den Fit.*

6.8 Auflösung in Abhängigkeit vom Zenitwinkel

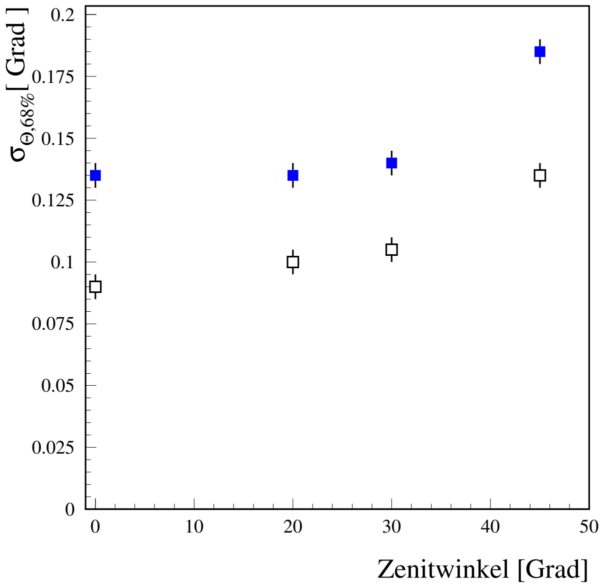


Abbildung 6.19: *Auflösung der Schauerauftreffpunktes in Abhängigkeit vom Zenitwinkel. Die geschlossenen Quadrate sind die Werte für die geometrische Rekonstruktion, die offenen für den Fit.*

In Abbildung 6.19 ist die Auflösung der Schauerrichtung in Abhängigkeit vom Zenitwinkel aufgetragen. Es handelt sich um Schauer im Energiebereich zwischen $0,5$ und $5 TeV$ mit einem Schauerauftreffpunkt kleiner 250m.
Beide Methoden zeigen den gleichen Verlauf, mit zunehmendem Zenitwinkel wird die Auflösung schlechter.
Beim Fit beträgt die Verschlechterung zwischen $0°$ und $20°$ ca. 20%. Bei der geometrischen Rekonstruktion ist sie etwas geringer, sie liegt bei 15%.

Insgesamt ist der Fit im Mittel um 20% besser als die geometrische Methode.

Betrachtet man nun die Auflösung des Schauerauftreffpunktes in Abbildung 6.20, so stellt man auch hier eine Verschlechterung mit zunehmendem Zenitwinkel fest. Sie

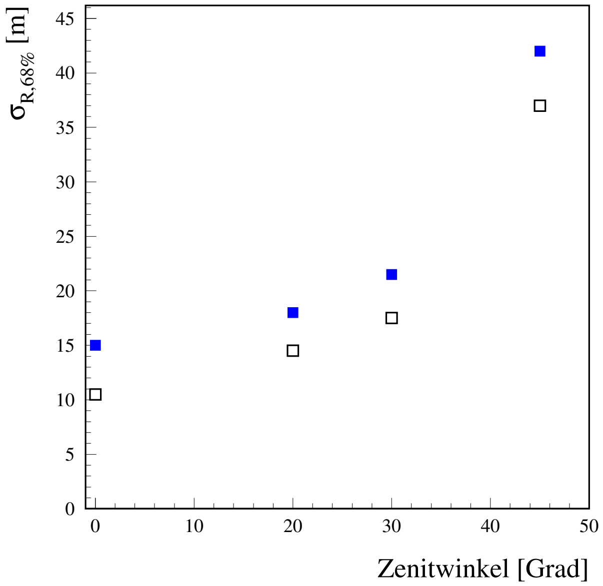


Abbildung 6.20: *Auflösung der Schauerauftreffpunktes in Abhängigkeit vom Zenitwinkel.Die geschlossenen Quadrate sind die Werte für die geometrische Rekonstruktion, die offenen für den Fit.*

beträgt zwischen 0° und 20° Zenitwinkel ca. 20%.
Im gesamten Zenitwinkelbereich ist der Fit um ca. 20% besser.

Kapitel 7

Anwendung auf Mkn 501 Daten

Um das hier vorgestellte Bildanalyseverfahren mit realen Meßdaten zu testen, wurde das Fitverfahren auf Daten aus Beobachtungen der aktiven Galaxie Mkn 501 angewendet. Ein Vergleich mit der konventionellen geometrischen Rekonstruktion soll aufzeigen, ob die erwartete und an Monte Carlo Daten nachgewiesene Verbesserung auch in der Realität beobachtet wird.

Mkn 501 zählt zu der Unterklasse der Blazare. So bezeichnet man aktive Galaxien deren Jets in Richtung der Sichtlinie liegen. Mkn 501 weist eine Rektaszension von $16.89\,h$ und eine Deklination von $39.76°$ auf (Ephemeriden 1997.5). Die Rotverschiebung liegt bei z=0.033 [17], dies entspricht einer Entfernung von $\approx 3 \cdot 10^8$ Lichtjahren.

7.1 Der Datensatz

Die der Analyse zugrundeliegenden Daten stammen aus dem Zeitraum 2. Juni 1997 bis 10. Juli 1997 und umfassen eine Gesamtmeßzeit von $21h$. Es werden nur Daten verwendet, die unter guten Wetterbedingungen gemessen wurden. Die Datennahme erfolgte im sogenannten Wobbel-Mode. Dabei wird das Teleskop auf einen Punkt gerichtet, der in Deklinationsrichtung um $\Delta dec = \pm 0,5°$ von der nominellen Quellposition verschoben ist. Um systematische Fehler zu vermeiden, wird zwischen den beiden Richtungen der Verschiebung alle $20\,min$ gewechselt [14]. Diejenige Region, die $\Delta dec = \pm 1°$ von der Quellenposition entfernt liegt und auf die andere Seite der Kamera abgebildet wird, dient als Vergleichsregion zur Korrektur des Untergrundes (OFF-Region).

7.2 Wahl der Startwerte

Als Startwerte für den Schauerauftreffpunkt und für die Schauerneigung dienen die Werte, die die konventionelle geometrische Rekonstruktion liefert. Schauer mit einem rekonstruierten Schauerauftreffpunkt größer als $250\,m$ und mit Differenzen Θ^2_{ON} bzw. Θ^2_{OFF} zwischen nomineller und rekonstruierter Quellposition größer als $0.5^{\circ 2}$ werden verworfen. Θ^2_{ON} bzw. Θ^2_{OFF} sind folgendermaßen definiert:

$$\Theta^2_{ON} = \frac{360^\circ}{24h} \cdot \cos\left(dec_{501}\right)\left(ra_{501} - ra_{rek}\right)^2 + \left(dec_{501} - dec_{rek}\right)^2 \qquad (7.1)$$

$$\Theta^2_{OFF} = \frac{360^\circ}{24h} \cos\left(dec_{501}\right)\left(ra_{501} - ra_{rek}\right)^2 + \left(dec_{501} \pm 1.0^\circ - dec_{rek}\right)^2 \qquad (7.2)$$

dec_{501}, dec_{ref} und ra_{501}, ra_{ref} sind Deklination bzw. Rektaszension von nomineller und rekonstruierter Quellposition.

Den Startwert der Energie erhält man aus der in Kapitel 3.4 beschriebenen Energierekonstruktion. Der q-Faktor wird auf eins gesetzt.

Schauer mit einer Gesamtamplitude kleiner 40 ph.e in einer Kamera werden ebenfalls nicht berücksichtigt. Die Festlegung der Fitregion ist in Kapitel 4.2.2 beschrieben.

7.3 Überprüfung der theoretischen Profile

Zur Überprüfung der theoretischen Profile wurden die Meßprofile mit den theoretischen Profilen im Fitkoordinatensystem verglichen. Dies ist in Abbildung 7.1 gezeigt. Für einen Schauerabstand von $100\,m$ ist die Schaueramplitude entlang der x_{fit}-Achse bei $y_{fit} = 0^\circ$ (Abbildung 7.1 a)), einerseits sowie entlang der y_{fit}-Achse bei $x_{fit} = 1.1^\circ$ (Abbildung 7.1 b)) und $x_{fit} = 1.9^\circ$ (Abbildung 7.1 c)), andererseits, dargestellt. Im Bereich des Maximums stimmt das theoretische Profil mit dem Meßprofil gut überein. Bei größeren x_{fit} Werten liegt das theoretische Profil jedoch systematisch über dem Meßprofil. Auch im Falle eines Schauerabstandes von $180\,m$ weist das theoretische Profil eine höhere Amplitude auf. Hier liegt die Abweichung jedoch noch innerhalb der Fehlergrenzen des Meßprofils.
Insgesamt ist festzustellen, daß das hier zugrunde gelegte theoretische Profil bei großen x_{fit}-Werten eine zu hohe Amplitude aufweist. Dies beeinträchtigt naturgemäß die Genauigkeit der Rekonstruktion. Insbesondere könnte dies zu einer Unterschätzung der Energie führen.

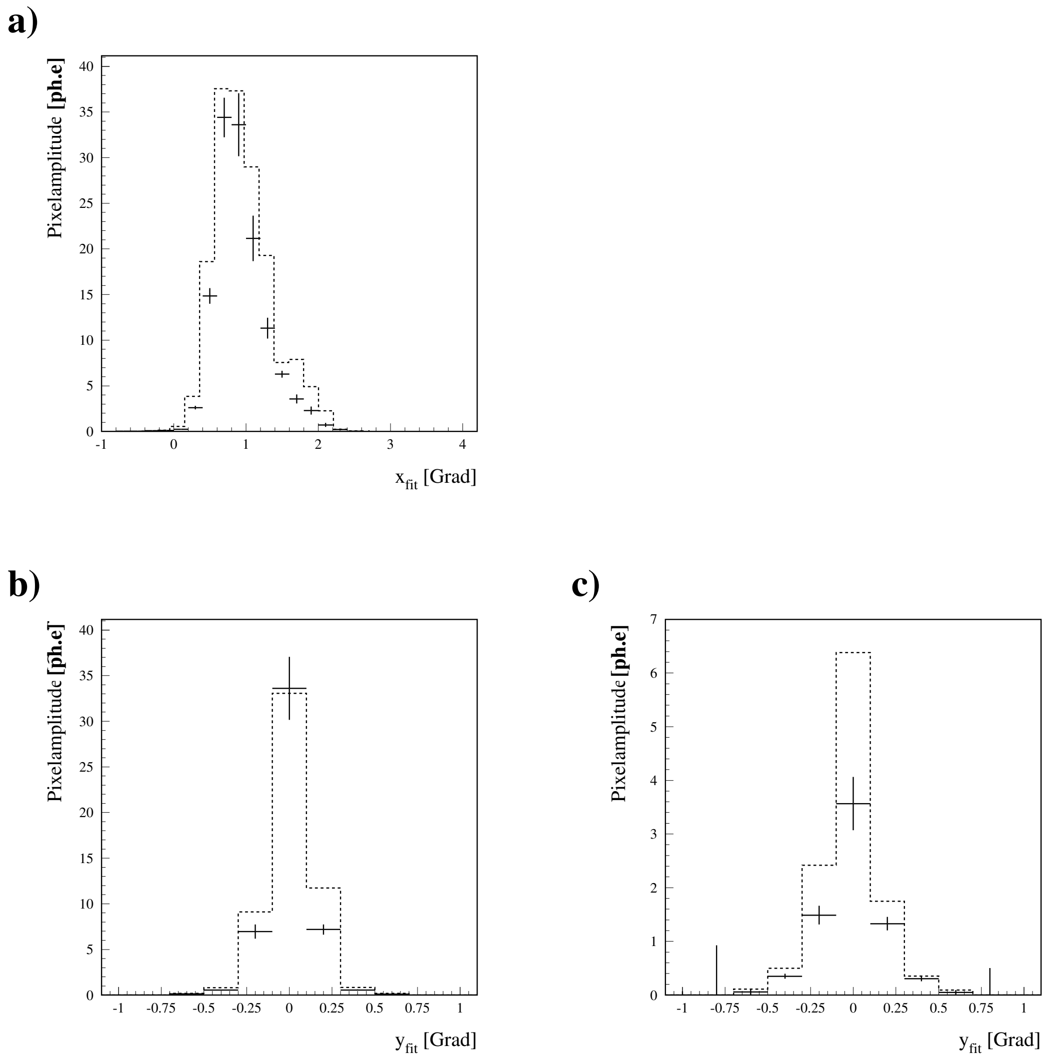


Abbildung 7.1: *Dargestellt ist das Meßprofil und das theoretische Profil (gestrichelte Linie) bei einem Schauerabstand von* $100\,m$. *In a) ist ein Schnitt entlang der* x_{fit}*-Achse bei* $y_{fit} = 0°$ *gezeigt. b) und c) zeigen Schnitte entlang der* y_{fit}*-Achse bei* $x_{fit} = 1.1°$ *und* $x_{fit} = 1.9°$.

7.4 Diskussion der Ergebnisse

Mit den oben geschilderten Startbedingungen wurde der Fit auf Mkn 501 Meßdaten angewendet. Daraus resultiert für jedes Ereignis eine rekonstruierte Schauerrichtung.

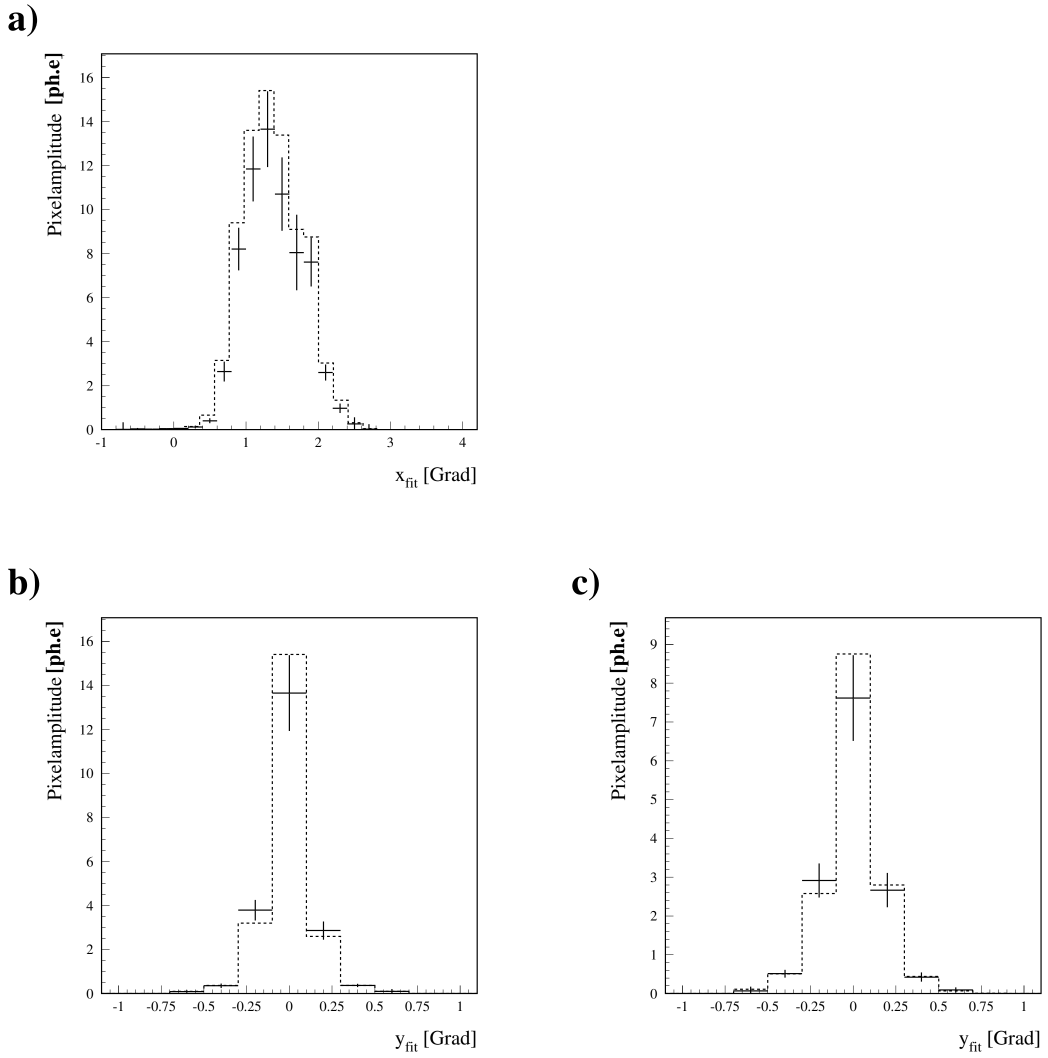


Abbildung 7.2: *Dargestellt ist das Meßprofil und das theoretische Profil (gestrichelte Linie) bei einem Schauerabstand von* $180\,m$*. In a) ist ein Schnitt entlang der* x_{fit}*-Achse bei* $y_{fit} = 0°$ *gezeigt. b) und c) zeigen Schnitte entlang der* y_{fit}*-Achse bei* $x_{fit} = 1.5°$ *und* $x_{fit} = 2.1°$.

Die wahre Schauerrichtung ist aus der Position der Punktquelle Mkn 501 bekannt. Im folgenden wird die Abweichung der rekonstruierten von der wahren Schauerrichtung für den Fit Θ_{fit} mit der entsprechenden Differenz für die konventionelle geometrische Rekonstruktion Θ_{geo} verglichen. Die Verteilungen basieren auf dem Überschuß der

Ereigniszahlen der ON-Region über der OFF-Region. In Tabelle 7.1 ist die Anzahl der Ereignisse in der ON- und OFF-Region für die geometrische Rekonstruktion und den Fit in einem Bereich von Θ^2_{ON} bzw. $\Theta^2_{OFF} < 0.02^{\circ 2}$ angegeben sowie die statistische Signifikanz des Überschusses.

Methode	N_{ON}	N_{OFF}	$\Delta N = N_{ON} - N_{OFF}$	Signifikanz
geo. Rek.	8347	3115	5232	$49.79\,\sigma$
Fit	9330	2839	6491	$60.40\,\sigma$

Tabelle 7.1: *Anzahl der Ereignisse in der ON- bzw. OFF-Region mit Θ^2_{ON} bzw. $\Theta^2_{OFF} < 0.02^{\circ 2}$, sowie die statistische Signifikanz für die geometrische Methode und den Fit. Es wurde nur die in Kapitel 7.2 erwähnten Schnitte verwendet.*

Zur Berechnung der statistische Signifikanz einer Messung wurde folgende Formel verwendet. Sie stammt aus [16] und folgt aus einer Maximum-Likelihood-Analyse.

$$S = \sqrt{2}\Big(N_{ON}\ln\Big(\frac{1+\alpha}{\alpha}\frac{N_{ON}}{N_{OFF}+N_{ON}}\Big) + N_{OFF}\ln\Big((1+\alpha)\frac{N_{OFF}}{N_{OFF}+N_{ON}}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \quad (7.3)$$

N_{OFF} und N_{ON} gibt die Anzahl der Ereignisse der OFF bzw. ON Messung an. α ist das Verhältnis zwischen der Meßzeit von ON und OFF. In diesem Fall ist $\alpha = 1$.
Bei der geometrischen Rekonstruktion erhält man eine Signifikanz von $\sigma_{geo} = 49.79$, beim Fit von $\sigma_{fit} = 60.40$. Sie liegt beim Fit um 22% höher als bei der geometrischen Rekonstruktion.
Zur Überprüfung der Schauerrichtungsrekonstruktion, wurde in Abbildung 7.3 die Differenzverteilung der rekonstruierten von der wahren Schauerrichtung in x- und y-Richtung des Kamerakoordinatensystems aufgetragen. a) und b) zeigen das Ergebnis des Fits, c) und d) das der geometrischen Rekonstruktion. An die Meßwerte wurde jeweils eine Gaussfunktion angepaßt.
Die Quellposition wird von beiden Methoden richtig wiedergegeben. Eine systematische Verschiebung ist nicht zu erkennen.
Im Falle der geometrischen Rekonstruktion ermittelt man eine Auflösung von $\sigma_{\Theta,x} = 0.085^\circ \pm 0.004$ bzw. $\sigma_{\Theta,y} = 0.090^\circ \pm 0.004^\circ$. Im Vergleich dazu liefert der Fit $\sigma_{\Theta,x} = 0.068^\circ \pm 0.002^\circ$ bzw. $\sigma_{\Theta,y} = 0.072^\circ \pm 0.003^\circ$. Für die Auflösung ergeben sich bei beiden Rekonstruktionsmethoden leicht unterschiedliche Werte in x- bzw. y-Richtung. In beiden Fällen erhält man eine Verbesserung für den Fit von 25%.

Den gleichen Sachverhalt zeigt Abbildung 7.4 in leicht veränderter Darstellung. Es ist die quadratische Differenzverteilung der Schauerrichtung aufgetragen. An die

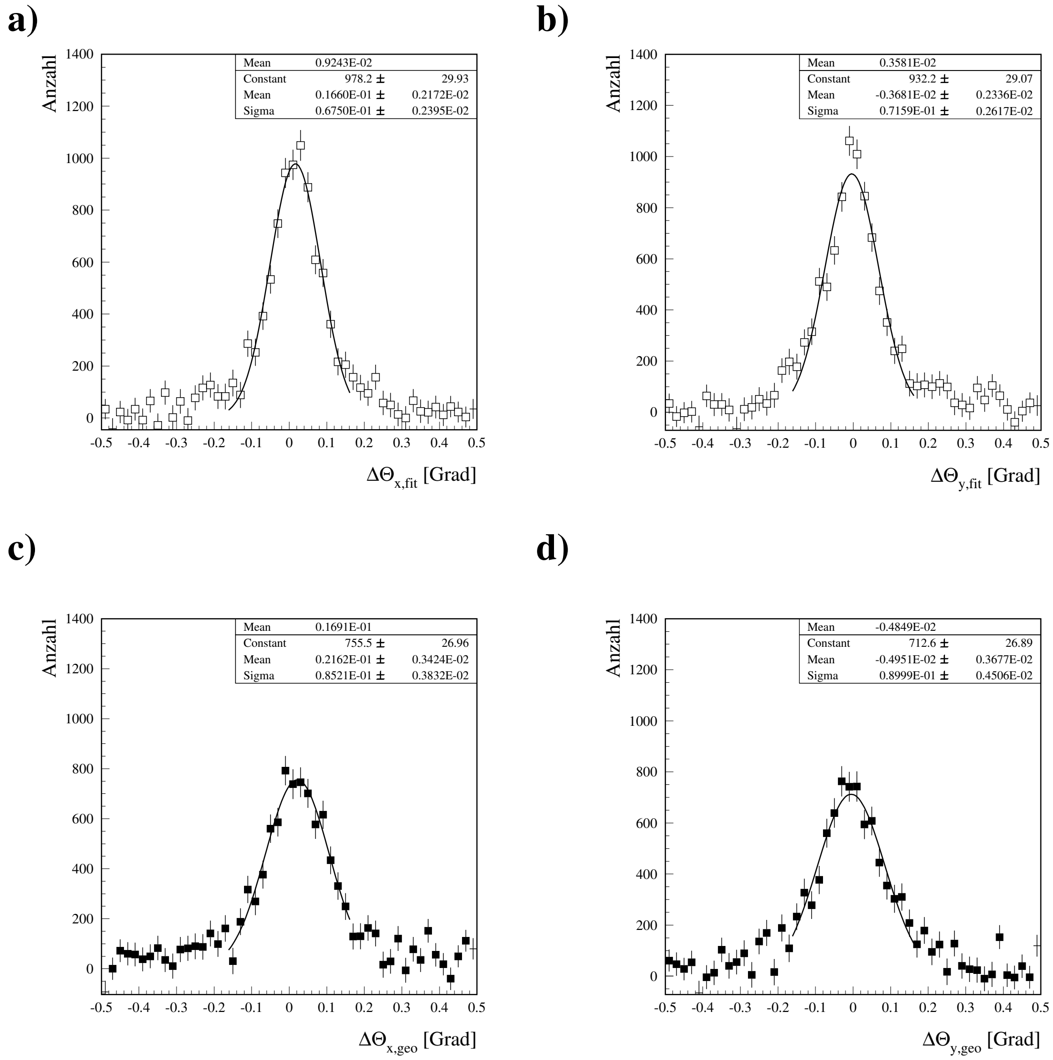


Abbildung 7.3: *Dargestellt ist die Differenz zwischen rekonstruierter und wahrer Schauerrichtung im Kamerakoordinatensystem. An die Meßdaten ist jeweils eine Gaussfunktion angepasst. Die beiden oberen Diagramme zeigen die Differenzverteilung für den Fit. a) bezieht sich auf die x-Achse, b) auf die y-Achse. Die beiden unteren Diagramme zeigen das Ergebnis der geometrischen Rekonstruktion. In c) für die x- und in d) für die y-Achse*

Differenzverteilung wurde die Funktion $p_1/(2p_2^2)\exp\left(-1/2(\Theta^2/p_2^2)\right)$ angepaßt. Die Breite der zweidimensionalen Normalverteilung um die Quellposition, die sogenannte projizierte Auflösung, wird durch den Parameter p_2 bestimmt. Im Fall der geo-

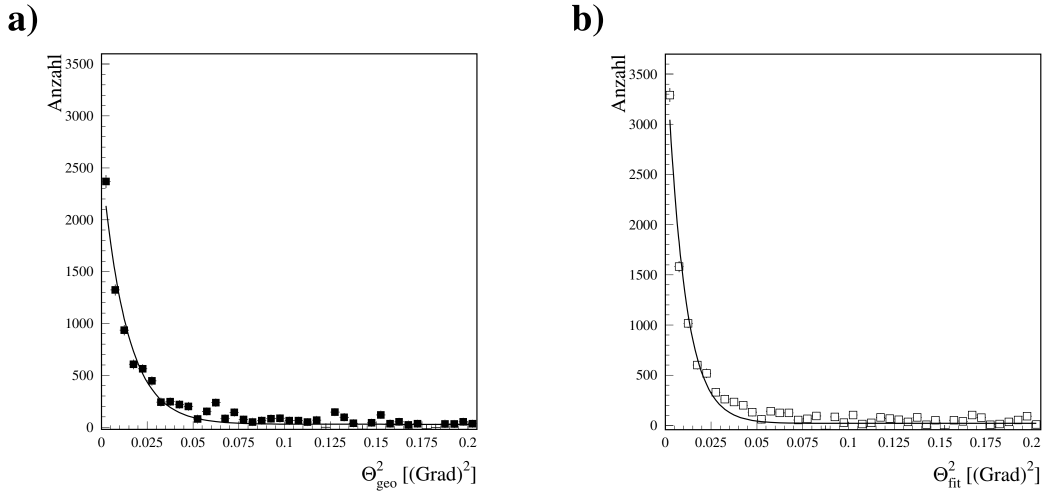


Abbildung 7.4: *Radiale Winkelverteilung als Funktion des quadratischen Abstandes der wahren von der rekonstruierten Schauerrichtung. a) zeigt das Ergebnis der geometrischen Rekonstruktion und b) das Ergebnis des Fits. An beide Verteilungen wurde eine Funktion der Form* $p_1/(2p_2^2)\exp\left(-1/2(\Theta^2/p_2^2)\right)$ *angepaßt.*

metrischen Rekonstruktion erhält man $\sigma_{\Theta,x,y} = 0.089° \pm 0.004°$. Der Fit liefert den Wert $\sigma_{\Theta,x,y} = 0.069° \pm 0.003°$, dies entspricht einer Verbesserung um 28%. In Tabelle 7.2 sind für die Richtungsrekonstruktion die unterschiedlich definierten Auflösungen beider Methoden einander gegenübergestellt. Die Verteilungen folgen nicht streng einer Normalverteilung. Dies erkennt man anhand der Abweichung von der Bedingung $\sigma_{68\%} = 1.51 \cdot \sigma_{x,y}$, die bei einer reinen Normalverteilung gelten würde. Beim Fit beträgt der Faktor 2.10 ± 0.16, bei der geometrischen Rekonstruktion 2.08 ± 0.15.

$\sigma_{\Theta,x}$	$\sigma_{\Theta,y}$	$\sigma_{\Theta,x,y}$	$\sigma_{\Theta,68\%}$	$\sigma_{\Theta,68\%}/\sigma_{\Theta,x,y}$
geometrische Rekonstruktion				
$(0.086 \pm 0.004)°$	$(0.090 \pm 0.004)°$	$(0.089 \pm 0.004)°$	$(0.185 \pm 0.005)°$	2.08 ± 0.15
Fit				
$(0.068 \pm 0.002)°$	$(0.072 \pm 0.002)°$	$(0.069 \pm 0.003)°$	$(0.145 \pm 0.005)°$	2.10 ± 0.16

Tabelle 7.2: *Richtungsauflösung für die geometrische Rekonstruktion und den Fit für unterschiedliche Definitionen der Auflösung.*

Auflösung in Abhängigkeit von der Energie

Zur genaueren Untersuchung der Rekonstruktion mit Hilfe von Mkn 501 Daten, wurde die projizierte Richtungsauflösung $\sigma_{\Theta,x,y}$ in Abhängigkeit von der Energie für den Fit (offene Quadrate) und die geometrische Rekonstruktion (geschlossene Quadrate) in Abbildung 7.5 aufgetragen. Als Energiewert wurde für die geometrische Rekonstruktion die rekonstruierte Energie des Fits verwendet. Der Fit gibt eine bessere Richtungsauflösung. Die Verbesserung beträgt ca. 15%.

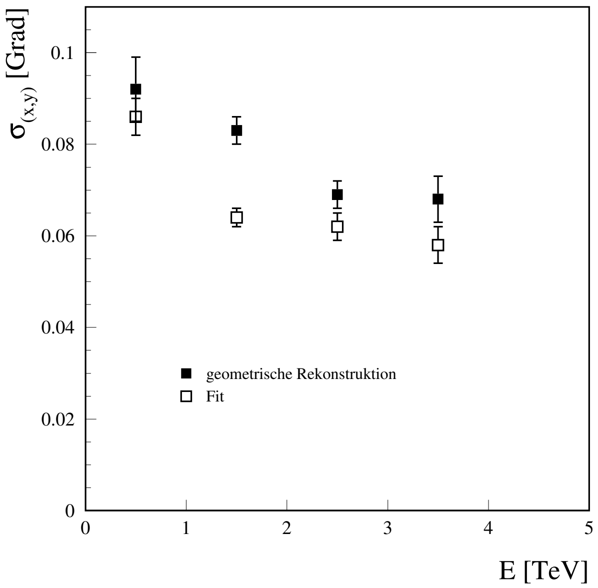


Abbildung 7.5: *Aufgetragen ist die projizierte Auflösung $\sigma_{\Theta,x,y}$ der Schauerrichtung für die geometrische Rekonstruktion und den Fit. Die Energiewerte stammen auch im Fall der geometrischen Rekonstruktion vom Fit.*

Auflösung in Abhängigkeit von der Anzahl der getriggerten Teleskope

Abbildung 7.6 zeigt die Aufösung in Abhängigkeit von der Anzahl der getriggerten Teleskope. Wie zu erwarten, verbessert sich die Auflösung mit steigender Anzahl, da der Informationsgehalt der zugrunde liegenden Daten wächst. Die Verbesserung bei vier getriggerten Teleskopen im Vergleich zu zwei getriggerten Teleskopen, beträgt bei der geometrischen Rekonstruktion 70%, beim Fit 60%. Bei zwei getriggerten Teleskopen schneidet der Fit um 33% besser ab, bei vier Teleskopen nur noch um 23%. Die geometrische Methode reagiert ungünstiger, wenn nur zwei Teleskope triggern. Sie nutzt den Informationsgehalt der Meßdaten weniger gut. Deshalb reagiert die geometrische Methode unter diesen Umständen besonders empfindlich auf Randbilder der Kamera und auf lichtschwache Bilder. Sobald drei oder mehr Teleskope triggern, mittelt sich dieser Effekt teilweise heraus.

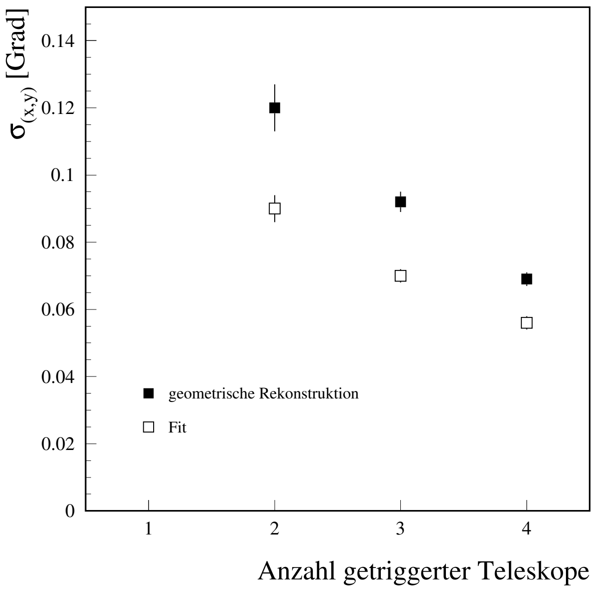


Abbildung 7.6: *Aufgetragen ist die projizierte Auflösung $\sigma_{\Theta,x,y}$ der Schauerrichtung für die geometrische Rekonstruktion und den Fit in Abhängigkeit von der Anzahl der getriggerten Teleskope.*

Auflösung in Abhängigkeit vom Schauerauftreffpunkt

Abbildung 7.7 stellt die Auflösung der Schauerrichtung bei Anwendung auf reale Meßdaten in Abhängigkeit vom Schauerauftreffpunkt graphisch dar. Der Fit zeigt eine Verbesserung im Vergleich zur geometrischen Rekonstruktion. Diese beträgt im Schnitt 17%. Bei beiden Rekonstruktionsverfahren ist eine Verschlechterung der Auflösung bei Werten oberhalb $100\,m$ zu erkennen. Dieser Effekt resultiert aus der

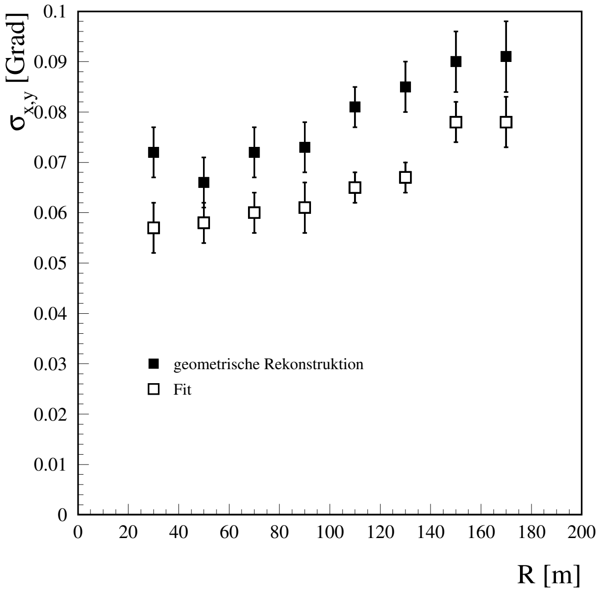


Abbildung 7.7: *Aufgetragen ist die projizierte Auflösung $\sigma_{\Theta,x,y}$ der Schauerrichtung für die geometrische Rekonstruktion und den Fit in Abhängigkeit vom Schauerauftreffpunkt.*

Tatsache, daß die in der Kamera fallenden Lichtmenge stark abnimmt, wenn der maximale Cherenkovradius überschritten wird.

Auflösung in Abhängigkeit vom Zenitwinkel

Abbildung 7.8 zeigt die Auflösung der Schauerrichtung der Meßdaten in Abhängigkeit vom Zenitwinkel für die geometrische Rekonstruktion (geschlossene Quadrtate) und den Fit (offene Quadrate). Es wurde jeweils alle Ereignisse in einem Zenitwinkelbereich von 5° verwendet und die resultierende Auflösung beim Zentralwert des jeweiligen Zenitwinkelbereichs aufgetragen. Mit zunehmendem Zenitwinkel verschlechtert sich die Richtungsauflösung des Fits um ca. 7%. Im Vergleich zur geometrischen Rekonstruktion hat der Fit eine um ca. 15% verbesserte Richtungsauflösung.

Der Fit zeigt auch bei der Anwendung auf echte Daten eine Verbesserung im Vergleich zur geometrischen Rekonstruktion. Die Signifikanz des Signals nimmt um ca. 22% zu, die Auflösung der Schauerrichtung um ca. 25%.

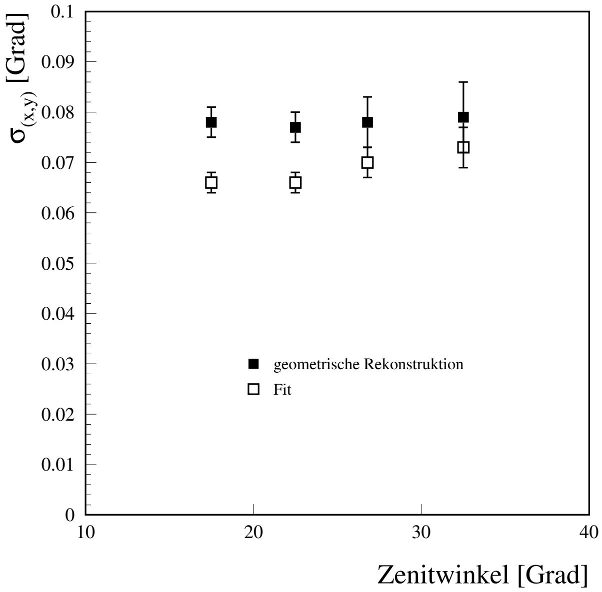


Abbildung 7.8: *Aufgetragen ist die projizierte Auflösung $\sigma_{\Theta,x,y}$ der Schauerrichtung für die geometrische Rekonstruktion und den Fit in Abhängigkeit vom Zenitwinkel.*

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, das Bildanalyseverfahren von M. Ullrich ([6], [7]) zu untersuchen und zu verbessern. Die Parmeter von elektromagnetischen Schauern werden hierbei durch Vergleich eines theoretischen Cherenkov Lichtildes mit dem gemessenen Cherenkov Lichtbild rekonstruiert, indem die Schauerparameter so variiert werden, daß beide Bilder so gut wie möglich übereinstimmen. Das dafür benötigte theoretische Profil wurde anhand von Monte Carlo Daten erstellt ([6], [7]). Der Vergleich erfolgt in der Praxis durch die Minimierung einer geeigneten χ^2-Funktion der folgenden Form mit der Wichtung $\sigma_{i,t}$:

$$\chi^2(R_x, R_y, \Theta_x, \Theta_y, E, q) = \sum_{i,t} \frac{(1/q\, A_i^{theo}(x_{i,t}, y_{i,t}, R, E) - A_i^{mes}(x_{i,t}, y_{i,t}, R, E))^2}{\sigma_{i,t}^2}$$

Summiert wird über Pixel i und Teleskope t.
$A_i^{theo}(x_{i,t}, y_{i,t}, R, E)$ stellt die theoretisch berechnete Pixelamplitude dar, $A_i^{mes}(x_{i,t}, y_{i,t}, R, E)$ die gemessene Amplitude. (R_x, R_y) sind die Koordinaten des Schauerauftreffpunktes, (Θ_x, Θ_y) die der Schauerrichtung.
Das absolute Minimum dieser Funktion bestimmt die Schauerparameter. Da das Verhalten dieser Funktion ausschlaggebend für die erfolgreiche Minimierung ist, wurden mehrere unterschiedliche Wichtungen untersucht, die alle auf der folgenden Grundgleichung basieren.

$$\sigma_{i,t}^2 = 1.5 A_{i,t} + (1.3\, ph.e.)^2$$

Verschiedene Möglichkeiten für $A_{i,t}$ wurden untersucht. Zuerst wurde die Version von M. Ullrich ([6], [7]) verwendet. Bei dieser Wichtung entspricht $A_{i,t}$ der Meßamplitude. Die χ^2-Funktionen mit dieser Wichtung erwiesen sich als nicht optimal, da sie Nebenminima besaßen.

Im einem nächsten Schritt wurde für $A_{i,t}$ der Mittelwert aus der Meßamplitude und der Amplitude des theoretischen Profils verwendet. Die Nebenminima waren deutlich geringer ausgeprägt, jedoch noch nicht vollständig eliminiert.

Als dritte Möglichkeit wurde eine Wichtung auf Basis der theoretischen Pixelamplitude untersucht. Der Verlauf dieser χ^2-Funktion wies nun keine Nebenminima mehr auf.

Außerdem wurde untersucht, wie sich die unterschiedlichen χ^2-Funktionen verhalten, wenn für die Summation nicht die gesamte Kamerafläche, sondern nur eine kleinere, das Meßprofil umgebende Fitregion verwendet wird. Hierbei zeigt die Funktion mit Wichtung auf der Basis der theoretischen Pixelamplitude ebenfalls den besten Verlauf. Die Einschränkung führte zu keiner Verkleinerung des Bereichs der Startwerte, bei denen der Fit funktioniert.

Die drei verschieden gewichteten χ^2-Funktionen wurden auf Monte Carlo Daten mit einem Zenitwinkel von $0.0°$ angewendet und mit den Ergebnissen der konventionellen geometrischen Rekonstruktion verglichen. Erwartungsgemäß verhielt sich die χ^2-Funktion mit der Wichtung auf Basis der theoretischen Amplitude am besten.

Dieses Rekonstruktionsverfahren mit Wichtung auf der Basis der theoretischen Pixelamplitude wurde auf Monte Carlo Daten des Zenitwinkels $0°$ angewendet und mit der geometrischen Rekonstruktion verglichen. Man erzielte eine Verbesserung der Auflösung des Schauerauftreffpunktes um 45% und der Schauerrichtung um 50%.

Bei der Anwendung auf Mkn 501 Daten erhielt man eine um 25% bessere Richtungsauflösung als bei der geometrische Rekonstruktion.

Ein weiteres wichtiges Ziel dieser Arbeit war die Verringerung der Rechenzeit. Ansatzpunkt dafür war die rechenaufwendige numerische Integration der Photoelektronendichte des theoretischen Profils über die Pixelflächen. Diese Integration wurde für ein Punktraster von Schauerabständen im Bereich von $0\,m$ bis $300\,m$ mit einem Abstand von $5\,m$ im Bereich von $0\,m$ und $175\,m$ und mit einem Abstand von $25\,m$ im Bereich von $175\,m$ und $300\,m$ einmal durchgeführt und die Werte tabellarisch abgespeichert. Zwischen den abgespeicherten Werten wird linear interpoliert. Mit diesen Maßnahmen konnte die Rechenzeit um mindestens einen Faktor 4 vermindert werden.
Durch die Berechnung neuer theoretischer Profile in Abhängigkeit von der Energie und dem Zenitwinkels könnte einen weitere Verbesserung dieser Methode erreicht werden.

Anhang A

Lineare Interpolation

Zur linearen Interpolation zwischen den gespeicherten Werten der Pixelamplitude dient eine Funktion der Form:

$$f(x_{fit}, y_{fit}, R) = a\,x_{fit} + b\,y_{fit} + c\,R + d\,x_{fit}\,y_{fit} + e\,x_{fit}\,R + f\,y_{fit}\,R + g\,x_{fit}\,y_{fit}\,R + h$$

Es ist zu beachten, daß sich die x_{fit}-Koordinate nach Gleichung 4.5 bei einer Verschiebung des Schauermaximums verändert. Es gilt $x'_{fit} = 1/q\,x_{fit}$. Der Pixelmittelpunkt wird also um einen Faktor 1/q verändert.
Wählt man $x_1, x_2, y_1, y_2, R_1, R_2$ wie in Abbildung A gegeben, so gilt:

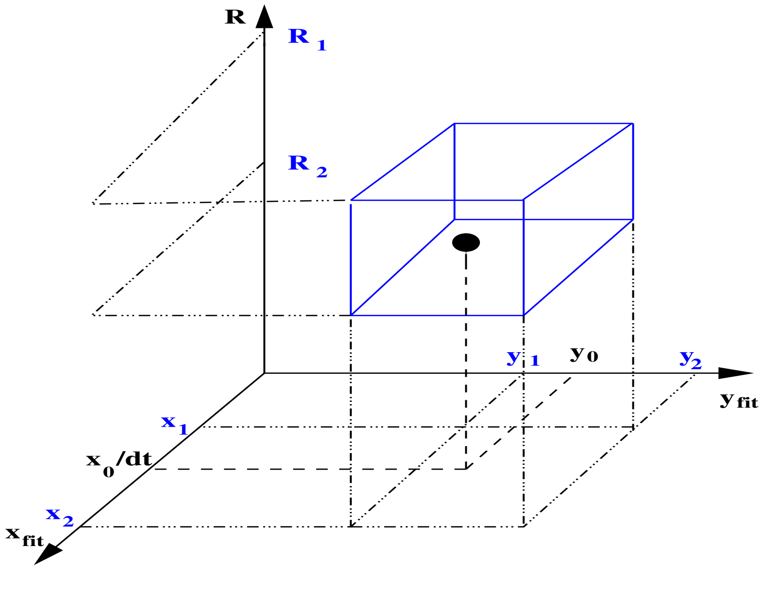


Abbildung A.1: *Wahl der Stützpunkte für die Lineare Approximation*

$$
\begin{aligned}
a &= -\frac{y_1R_1(A(x_1,y_2,R_2)-A(x_2,y_2,R_2))+y_2R_1(A(x_2,y_1,R_2)-A(x_1,y_1,R_2))}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)}+\\
&\quad \frac{y_1R_2(A(x_2,y_1,R_2)-A(x_1,y_2,R_1))+y_2R_2(A(x_1,y_1,R_1)-A(x_2,y_1,R_1))}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)}
\end{aligned} \tag{A.1}
$$

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{x_1R_1(A(x_2,y_2,R_2)-A(x_2,y_1,R_2))+x_2R_1(A(x_1,y_1,R_2)-A(x_1,y_2,R_2))}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)}+\\
&\quad \frac{x_1R_2(A(x_2,y_1,R_1)-A(x_2,y_2,R_1))+x_2R_2(A(x_1,y_2,R_1)-A(x_2,y_2,R_1))}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)}
\end{aligned} \tag{A.2}
$$

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{x_1y_1(A(x_2,y_2,R_1)-A(x_2,y_2,R_2))+x_2y_1(A(x_1,y_2,R_2)-A(x_1,y_2,R_1))}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)}+\\
&\quad \frac{x_1y_2(A(x_2,y_1,R_2)-A(x_2,y_1,R_1))+x_2y_2(A(x_1,y_1,R_1)-A(x_1,y_1,R_2))}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)}
\end{aligned} \tag{A.3}
$$

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{R_1(A(x_1,y_1,R_2)-A(x_1,y_2,R_2)-A(x_2,y_1,R_2)+A(x_2,y_2,R_2))}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)}+\\
&\quad \frac{R_2(A(x_1,y_2,R_1)-A(x_1,y_1,R_1)+A(x_2,y_1,R_1)-A(x_2,y_2,R_1))}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R-1)}
\end{aligned} \tag{A.4}
$$

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{y_1(A(x_1,y_2,R_1)-A(x_1,y_2,R_2)-A(x_2,y_2,R_1)+A(x_2,y_2,R_2))}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)}+\\
&\quad \frac{y_2(A(x_1,y_1,R_2)-A(x_1,y_1,R_1)+A(x_2,y_1,R_1)-A(x_2,y_1,R_2))}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R-1)}
\end{aligned} \tag{A.5}
$$

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{x_1(A(x_2,y_1,R_1)-A(x_2,y_1,R_2)-A(x_2,y_2,R_1)+A(x_2,y_2,R_2))}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)}+\\
&\quad \frac{x_2(A(x_1,y_1,R_2)-A(x_1,y_1,R_1)+A(x_2,y_2,R_1)-A(x_2,y_2,R_2))}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)}
\end{aligned} \tag{A.6}
$$

$$g = \frac{A(x_1,y_1,R_2) - A(x_1,y_1,R_1) + A(x_2,y_2,R_1) - A(x_2,y_2,R_2)}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)} + \frac{A(x_2,y_1,R_1) - A(x_2,y_1,R_2) - A(x_2,y_2,R_1) + A(x_2,y_2,R_2)}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)} \tag{A.7}$$

$$h = \frac{y_1R_1(x_2A(x_2,y_2,R_2) - x_1A(x_2,y_2,R_2)) + y_2R_1(x_2A(x_1,y_1,R_2)}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)} - \frac{x_1A(x_2,y_1,R_2)) + y_2R_2(x_2A(x_2,y_2,R_1) + x_1A(x_2,y_2,R_1))}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)} + \frac{y_2R_2(x_1A(x_2,y_1,R_1) - x_2A(x_1,y_1,R_1))}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)(R_2-R_1)} \tag{A.8}$$

Die Pixelamplitude ist geben durch:

$$A_i^{theo}(x_0,y_0,R,E) = A_i^{theo}(x_{fit},y_{fit},R,E) =$$

$$\frac{x_{fit}}{q} + b\,y_{fit} + c\,R + d\,\frac{x_{fit}}{q}\,y_{fit} + e\,\frac{x_{fit}}{q}\,R + f y_{fit}\,R + g\,\frac{x_{fit}}{q}\,y_{fit}\,R$$

Literaturverzeichnis

[1] V. Hess, *Physik. Zeitschruft 13*, 1804, 1912

[2] K. Greisen, *Prog. Cosmic Ray Physics*, 3:1, 1956

[3] G. Kanbach et al.,*Space Science Review 49*, S. 69, 1988

[4] V. Schönfelderet et al.,*Astrophysical Journal Supplement, 86*, S. 657, 1993

[5] A.M. Hillas, *Proc. 19^{th} ICRC, La Jolla, 3*, page 445, 1985

[6] M. Ullrich, *Eine neue Bildanalysemethode für Abbildende Atmosphärische Cherenkov Teleskope und die zweidimensional Richtungsrekonstruktion von TeV-Photonen des Krebs-Nebels.* Doktorarbeit, 1996

[7] M. Ullrich, et al. *J. Phys. G 24, pp. 883-897*, 1998

[8] NAG Fortran M14 Library, *The Numerical Algorithms Groupe: Oxford* 1990

[9] F. A. Aharonian et al. *astro-ph/9808296*, 1998

[10] F. A. Aharonian, A. K. Konopelko, *astro-ph/9712044*, 1997

[11] A. Plyasheshnikow, Konopelko, Vorobyev, *Preprint N92 of P. Lebedev Phys. Inst.: Moscow* , 1988

[12] A. Konopelko, Plyasheshnikow, Schmidt *Preprint N6 of P. Lebedev Phys. Inst.: Moscow* , 1992

[13] N. Bulian et al., *Astroparticle Physics 8, p. 233* , 1998

[14] A. Daum et al., *Astroparticle Physics 8, p. 1*, 1997

[15] G. Hermann et al., *Vorausdruck MPI H-V36-1995, MPI für Kernphysik, Heidelberg*, 1995

[16] Ti-Pei Li and Yu-Quian Ma, *The Astroparticle Journal 272,p 317-324*, 1983

[17] M. Stickel, H. Fried, W. Kühr, *Astronomy & Astrophysics Supp. 98,p 393*, 1993

[18] W. Rhode et al. (HEGRA Kollaboration), *NIM A, 378:399*, 1996

[19] A. Linder für die HEGRA Kollaboration, *Proc. of the* 25^{th} *ICRC, Durban, 5, page 113*, 1997

[20] R. Mirzoyan et al. (HEGRA Kollaboration), *NIM A, 351:513-526*, 1994

[21] G. Rauterberg et al. (HEGRA Kollaboration), *Proc. of the* 24^{th} *ICRC, Rome, 3, page 460*, 1995

[22] Le. Bohec et al. *astro-ph/9804133*, 1998

[23] W. Press, Numerical Recipes in C

[24] K. Bernlöhr, Space Sci. Rev. 75, 185, 1996

[25] M. S. Longair, *High Energy Astrohysics.* Cambridge University Press, 1981

[26] B. Wiebel *Chemical composition in high energy cosmoc rays*, 1995

[27] B. Wiebel-Sooth, P.L. Biermann, in *Landolt-Boernstein Numerical Data and functional relationships*, Kap. 7.6, New Series, vol. VI 3C, Springer-Verlag, 1998 (in press)

[28] J. Quinn et al., Astrophysical Journal, 456, L83, 1996

[29] R. M. Sternheimer et al., Phys. Rev., 103:511, 1956

[30] R. M. Sternheimer et al., Atomic Data and Nuclear Data Tables, 30:261, 1984

[31] Particle Data Group, *Particle Physics Booklet*, July 1996

[32] W. Heitler, *Quantum Theory of Radiation.* Oxford University Press, 1954

[33] K. Kamata, J. Nishimura, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 6:93, 1958

[34] D . Perkins, *Hochenergiephysik*, Addison-Wesley, 1990

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die mich während des letzten Jahres unterstütz haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. W. Hofmann für die interessante Themenstellung und die Anregungen und Diskussionen während der Berarbeitung.

Dr. M. Hemberger, Dr. G. Hermann, Dr. M. Heß, Dr. C. Köhler, Dr. H. Krawczynski, H. Lampeitl, Dr. M. Panter und G. Pühlhofer danke ich für anregende Diskussionen und Ratschläge.

Den Mitgliedern der Heidelberger CT-Gruppe, Dr. F. Aharonian, M. Aye, O. Bolz, Dr. A. Daum, Dr. A. Heusler, A. Katona, J. Kettler, Dr. A. Kohnle, Dr. A. Konopelko, J. Mattes, Prof. Dr. H. Völk, Dr. C.A. Wiedner, H. Wirth sowie aus der Elektronikwerkstatt N. Bulian und M. Stein möchte ich für die angenehme Atmosphäre und das produktive Arbeitsklima danken.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei Frau J. Suppanz für ihren unermüdlichen Einsatz bei allen organisatorischen Fragen und Probleme bedanken.

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 7. Januar 1999 ....

(Unterschrift)