Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht–Karls–Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von
Björn Malte Schäfer
aus Zweibrücken/Rheinland–Pfalz
Juni 2000

Teilchenidentifizierung mittels multifraktaler und Wavelet–Parameter in der γ–Astronomie mit den HEGRA–Čerenkov–Teleskopen

Die Diplomarbeit wurde von Björn Malte Schäfer ausgeführt am

Max–Planck–Institut für Kernphysik
Heidelberg

unter der Betreuung von
Herrn Prof. Dr. W. Hofmann

Teilchenidentifizierung mittels multifraktaler und Wavelet–Parameter in der γ–Astronomie mit den HEGRA–Čerenkov–Teleskopen

Das Čerenkov–Teleskopsystem der HEGRA–Kollaboration ist in der Lage, Photonen ab einer Energie von 500 GeV zu detektieren, deren Richtung stereoskopisch zu rekonstruieren und die Energie des Photons mit einer Genauigkeit von zirka 20% zu bestimmen.
Mit dem Ziel, die Unterdrückung des hadronischen Untergrunds zu verbessern, wurde eine Parametrisierung der Čerenkov–Lichtverteilung in der HEGRA–Kamera durch multifraktale Parameter sowie durch Wavelet–Parameter vorgenommen und auf einen Datensatz der Aktiven Galaxie Mkn 501 angewendet. Die Leistungsfähigkeit der Parameter in Bezug auf die Trennung von Photon–induzierten Schauern von hadronischen Schauern wurde untersucht und und mit den konventionellen Hillas–Parametern zu verglichen.
Die Trennungseigenschaften der Parameter, die aus der multifraktalen Analyse folgen, sind mit dem Parameter *Concentration* vergleichbar, Wavelet–Parameter sind in ihrer Trennleistung geringfügig schlechter als der Parameter *skalierte Bildlänge*. Die Trennungseigenschaften zeigen keine Abhängigkeit von der Ordnung des Parameters.
Die Abhängigkeit der multifraktalen Parameter und der Wavelet–Parameter von der Bildhelligkeit und von der der Lage bzw. der Ausrichtung des Bildes in der Kamera wurde untersucht.
Wegen der engen linearen Korrelation der multifraktalen Parameter mit den Hillas–Parametern wurde der Ansatz verfolgt, die Ereignisse mit einem neuronalen Netz zu klassifizieren. Man sieht keine signifikante Verbesserung der Leistungsfähigkeit bei der Hinzunahme von multifraktalen Parametern zu den Hillas–Parametern.

Particle Identification Using Multifractal and Wavelet–Parameters in γ–Astronomy with the HEGRA–Čerenkov–Telescopes

The system of Čerenkov–telescopes maintained by the HEGRA–collaboration is able to detect photons with energies in excess of 500 GeV, to reconstruct their direction stereoscopically and to determine the photon energy with an accuracy of approximately 20%.
Aiming to improve the rejection of the hadronic background a parameterization of the distribution of the Čerenkov–light in the HEGRA–camera by multifractal parameters as well as wavelet–parameters was carried out and applied to a data sample of the active galaxy Mkn 501. The performance of the parameters in discriminating photon–induced showers from those of hadronic origin was examined and compared to the conventional parametrization by Hillas.
The performance of the parameters deduced in multifractal analysis is comparable to the parameter *concentration*, the performance of the wavelet-parameters is marginally worse compared to the parameter *scaled image length*. The performance does not depend on the order of the parameter.
The dependence of the multifractal parameters and of the wavelet–parameters on the image brightness, on the position and the orientation of the image ellipse is discussed in detail.
Because of the close linear correlation of the multifractal parameters with the Hillas–parameter a classification of the events by neural networking was examined. No significant improvement of the classification performance was observed by including multifractal parameters to the conventional parameters.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In der γ–Astronomie werden hochenergetische astrophysikalische Prozesse in Himmelskörpern wie Supernova–Überresten, Pulsarnebeln und aktiven galaktischen Kernen untersucht, bei denen Photonen mit Energien im GeV– und TeV–Bereich erzeugt werden. Die Photonenenergien folgen dabei keiner thermischen Verteilung: Sie entstehen als Nebenprodukt bei der Beschleunigung der geladenen Komponente der kosmischen Strahlung über Bremsstrahlungsprozesse, Synchrotronemission mit anschließenden inversen Compton–Stößen oder durch den Zerfall von π^0–Mesonen.

Im Gegensatz zu geladenen Teilchen, die durch die interstellaren und intergalaktischen Magnetfelder ihre Richtungsinformation verlieren und deren Fluss isotrop erscheint, breiten sich ungeladene Teilchen wie Photonen und Neutrinos geradlinig aus. Während die Neutrino–Astronomie noch am Anfang ihrer Entwicklung steht, hat sich die γ–Astronomie erfolgreich etabliert.

Da die Atmosphäre der Erde für elektromagnetische Strahlung dieser Energie undurchlässig ist, gibt es neben dem Nachweis der Photonen durch Experimente auf Satelliten oder hochfliegenden Ballonen nur noch die Möglichkeit, Photonen indirekt durch ihre Wechselwirkung mit den Molekülen der Luft nachzuweisen. Den letzteren Ansatz verfolgen abbildende Čerenkov–Teleskope, die sich im Vergleich mit anderen Detektortypen durch eine niedrige Energieschwelle und, vor allem bei stereoskopischen Systemen wie HEGRA, durch eine gute Energieauflösung und Richtungsrekonstruktion des primären Photons auszeichnen. Čerenkov–Teleskope benutzen die Atmospäre der Erde als Kalorimeter, in der die einfallenden hochenergetischen Teilchen eine Kaskade von Sekundärteilchen erzeugen, die ihre Energie durch Ionisation verlieren und abgestoppt werden. Solange die Teilchengeschwindigkeit die Phasengeschwindigkeit von Licht in dem Medium Luft übersteigt, emittieren sie Čerenkov–Licht, das in den Teleskopen nachgewiesen wird.

Der Fluss hadronischer Teilchen übertrifft den Fluss der Photonen selbst bei den hellsten Quellen am γ–Himmel wie dem Krebs–Nebel um einen Faktor von 10^4. Um auch schwache Quellen nachweisen zu können, benötigt man eine sehr gute Rejektion des hadronischen Untergrunds.

Eine einfache Parametrisierung der Verteilung des Čerenkov–Lichts in der Kamera der HEGRA–Teleskope geht auf A.M. Hillas zurück. Dabei wird das Bild durch eine Ellipse beschrieben, deren Kenngrößen über die zweiten Momente der Amplitudenverteilung berechnet werden. Für γ–Ereignisse sind kleine Halbachsen der Ellipse typisch. Auf diese Weise lassen sich hadronische Ereignisse sehr effektiv unterdrücken.

Ein anderer Ansatz wird in dieser Arbeit verfolgt: Da man sich die Entwicklung der Teilchenkaskade als selbstähnlichen Prozess veranschaulichen kann, erwartet man auch eine Selbstähnlichkeit der Verteilung des Čerenkov–Lichts. Diese Selbstähnlichkeit lässt sich durch geeignete multifraktale Parameter quantifizieren und auf deren Basis eine Rejektion des hadronischen Untergrunds erreichen. Einen alternativen Ansatz bietet die Wavelet–Analyse, die mit der Fourier–Analyse verwandt ist: Sie untersucht die Stärke von Fluktuationen auf verschiedenen Längenskalen.

In der vorliegenden Arbeit wird die multifraktale Analyse und die Wavelet–Analyse auf Čerenkov–Bilder, wie sie die HEGRA–Kamera liefert, angewandt und deren Eigenschaften hinsichtlich der Klassifizierung des Primärteilchens untersucht.

Die Korrelation zwischen den multifraktalen Parametern und den Hillas–Parametern macht es schwierig, durch kombinierte Schnitte die Separation zwischen γ–Ereignissen und hadronischen Ereignissen zu verbessern. Der in dieser Arbeit verfolgte Ansatz ist, die verschiedenen Parameter als Eingangssignale für ein neuronales Netz zu verwenden. Mit richtig eingestellten Gewichten und Schwellenwerten ist das neuronale Netz in der Lage, die Ereignisse mit einer kleinen Fehlerquote richtig zu klassifizieren.

In Kapitel 2 gibt eine kurze Einführung in die Physik der kosmischen Strahlung. Anschließend werden die astrophysikalischen Objekte und die Prozesse, die zur Emission von TeV–γ–Strahlung führen dargestellt. Das Kapitel 3 beschreibt die Wechselwirkung der Teilchen der kosmischen Strahlung mit der Atmosphäre: Die Physik der Luftschauer und die Absorptionsprozesse, denen das emittierte Čerenkov–Licht unterliegt, werden beschrieben. Das Kapitel 4 erläutert die Funktionsweise und den Aufbau der HEGRA–Čerenkov–Teleskope. In Kapitel 5 wird die Parametrisierung der Čerenkov–Lichtverteilung durch Hillas–Parameter dargestellt und beschrieben, wie sich durch Schnitte auf Parameter die Signifikanz eines γ–Signals erhöhen lässt. In Kapitel 6 wird die Theorie der multifraktalen Analyse und der Wavelet–Analyse eingeführt und deren Konzepte an einem einfachen Beispiel erläutert. In Kapitel 7 werden diese Analysemethoden auf die Čerenkov–Bilder angewendet und deren Eigenschaften bezüglich der Klassifikation des Primärteilchens untersucht und mit denen der Hillas–Parameter verglichen. Es wird untersucht, wie stark die Parameter, die aus der multifraktalen Analyse bzw. der Wavelet–Analyse folgen, mit den Hillas–Parametern korreliert sind. Die Abhängigkeit der multifraktalen Parameter von der Lage bzw. Ausrichtung des Bildes in der Kamera wird betrachet, ebenso wie die Abhängigkeit von Parametern wie der Bildhelligkeit. Kapitel 8 beschreibt schliesslich die Funktionsweise neuronaler Netze und deren Anwendung auf die γ/Hadron–Separation, wobei dem Netz multifraktale und Hillas–Parameter als Eingangswerte zur Verfügung stehen.

Kapitel 2

γ–Astronomie

2.1 Kosmische Strahlung

Die kosmische Strahlung wird in einer Vielzahl von Experimenten untersucht. Detektoren auf Satelliten oder hochfliegenden Ballonen können aufgrund ihrer kleinen sensitiven Fläche und des starken Abfalls des Teilchenflusses mit steigender Energie nur bis zu Energien von etwa 10^{11} eV Messungen durchführen. Auf der Erdoberfläche sind Teilchen dieser Energie nicht direkt nachweisbar, da sie mit den Molekülen der Luft wechselwirken, dabei einen sogenannten Luftschauer auslösen, in dem sie ihre Energie durch Ionisation und durch Emission von Bremsstrahlung abgeben und die Erdoberfläche nicht erreichen. Eine indirekte Nachweismethode ist die Detektion des von den Sekundärteilchen emittierten Čerenkov–Lichts. Oberhalb von 10^{12} eV erreicht eine genügend große Zahl von Sekundärteilchen die Erdoberfläche und können in Detektoren, die eine große Fläche abdecken, nachgewiesen werden.

Zusammensetzung

Die kosmische Strahlung setzt sich zu einem großen Teil aus Hadronen zusammen (98%), daneben existiert noch eine Komponente aus hochenergetischer γ–Strahlung (<0.2%) und ein elektronischer Anteil, der zirka 2% ausmacht. Der hadronische Anteil der kosmischen Strahlung besteht zu einem großen Teil aus Protonen (87%) und α–Teilchen (12%), schwerere Kerne ab dem Element Lithium machen zusammen nur ein Prozent aus ([WIE94]).

Die chemische Zusammensetzung der kosmischen Strahlung ist den relativen Häufigkeiten im Sonnensystem ähnlich, allerdings sind die Elemente unterhalb des Kohlenstoffs und Eisens deutlich häufiger vertreten, was durch Spallationsprozesse erklärt werden kann: Bei Kollisionen mit Kernen des interstellaren Mediums zerbrechen die Kerne der kosmischen Strahlung und füllen die Lücken in der Elementhäufigkeit unterhalb der Peaks bei Kohlenstoff und Eisen auf.

Spektrum

Die Abbildung 2.1 zeigt ein Spektrum des über alle hadronischen Komponenten gemittelten Teilchenflusses der kosmischen Strahlung. Bis zu einer Energie von etwa $3 \cdot 10^{15}$ eV lässt sich das Spektrum durch ein Potenzgesetz der Form $F(E) \sim E^{-\alpha}$ mit $\alpha \simeq 2.71$ beschreiben, oberhalb dieses sog. „Knies“ nimmt der spektrale Index des differentiellen Flusses auf $\alpha \simeq 3.0$ zu.

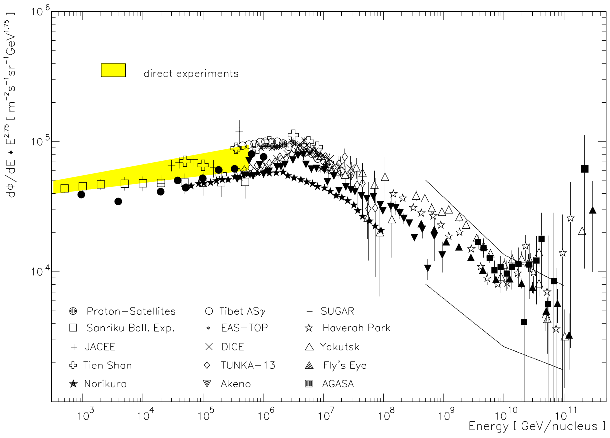


Abbildung 2.1: *Der differentielle Fluss $d\Phi/dE$ der geladenen kosmischen Strahlung in Abhängigkeit von der Teilchenenergie, multipliziert mit $E^{2.75}$ (aus [WIE98]).*

2.2 γ–Quellen und deren Spektren

Bei den astrophysikalischen Mechanismen, die die geladene kosmische Strahlung erzeugen, kommt es auch zur Emission von hochenergetischen γ–Quanten und Neutrinos. Da diese ungeladenen Teilchen nicht von Magnetfeldern abgelenkt werden und sich geradlinig ausbreiten, eignen sie sich, um Quellen zu identifizieren. Im Folgenden werden einige Beispiele von γ–Quellen vorgestellt.

2.2.1 Supernova–Überreste

Supernova–Überreste kommen als Quellen der kosmischen Strahlung in Frage. Zusammen mit dem Energieinhalt und der Verweildauer der kosmischen Strahlung in unserer Galaxis folgen Anforderungen an die galaktischen Teilchenbeschleuniger, die von Supernova–Überresten plausibel erfüllt werden.

Entwicklung eines Supernova–Überrestes

Bei einer Supernova wird eine mehreren Sonnenmassen entsprechende Materiemenge mit einer Geschwindigkeit von 10^7 m/s ausgeworfen. Die vorderste Front drückt das interstellare Medium weg und beschleunigt es auf Überschallgeschwindigkeit. Dadurch bildet sich eine Schockfront aus, die das Plasma erhitzt. Durch den Rückstoß auf die ausgeworfene Materie bildet sich eine zweite, rückwärtslaufende Schockfront aus, welche die nach außen dringende Auswurfmasse abbremst und aufheizt. Die Phasen der Entwicklung einer Supernova ist in [KIR94] dargestellt:

1. Zunächst expandiert der Supernova–Überrest mit konstanter Geschwindigkeit, bis die äußere Schockwelle eine Materiemenge überlaufen hat, die der ausgeworfenen Materiemenge entspricht. In der Literatur wird diese Phase der freien Ausdehnung als *Sweep–Up*–Phase bezeichnet.

2. Anschließend, was typischerweise nach einigen hundert Jahren der Fall ist, beginnt die *Sedov*–Phase, bei der die Explosionsenergie nicht nach außen abgegeben wird, sondern in dem heißen

Plasma verbleibt. Der Supernova–Überrest dehnt sich weiter adiabatisch aus, bis der Druck im Inneren des Supernova–Überrests auf den Druck der umgebenden Materie abgefallen ist.

3. In der sich nun anschließenden *Snowplough*–Phase dehnt sich der Supernova–Überrest weiter aus, bis die Bewegungsgeschwindigkeit der Schockwelle unter die Schallgeschwindigkeit im interstellaren Medium abgefallen ist.

Teilchenbeschleunigung an Schockwellen

In Bezug auf Teilchenbeschleunigung in Supernova–Überresten sind vor allem die ersten beiden Phasen in der Supernova–Entwicklung relevant. Die Teilchen werden durch Inhomogenitäten im magnetischen Feld mehrmals über die Schockwelle gestreut und gewinnen bei jeder Überquerung kinetische Energie entsprechend den Modellen zur Teilchenbeschleunigung an Schockwellen von Fermi ([LON81]). Diese Modelle reproduziert ein Energiespektrum der kosmischen Strahlung, das einem Potenzgesetz folgt.

γ–Emission von Supernova–Überresten

Protonen, die in der Supernova beschleunigt wurden, erzeugen bei Wechselwirkungen mit den Atomkernen des interstellaren Mediums π^0–Mesonen, die in γ–Quanten zerfallen. Eine Abschätzung der γ–Luminosität von Supernova–Überresten findet man in [DRU94]. Abbildung 2.2 zeigt die Anpassung verschiedener Modelle an das Spektrum der Supernova 1006.

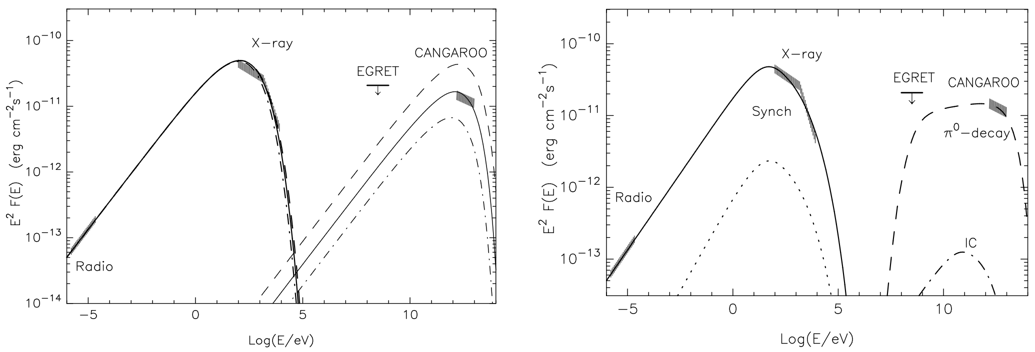


Abbildung 2.2: *Vergleich der γ–Emission von Supernova–Überresten im sog. Synchrotron–Self–Compton–Modell (links) und dem nukleonischen Modell (rechts) am Beispiel der Supernova 1006 ([AHA99a]).*

In alternativen Modellen wird die TeV–γ–Strahlung durch hochenergetische Elektronen nichtthermischen Ursprungs erzeugt, die Synchrotronquanten emittieren. Diese weichen Photonen werden durch inverse Compton–Stöße an relativistischen Elektronen auf TeV–Energien gebracht.

2.2.2 Plerionen

Die hellste Quelle am TeV–γ–Himmel ist der Krebs–Nebel, der zur Klasse der Plerionen gehört. In einem Plerion rotiert im Inneren eines Supernova–Überrestes ein Pulsar, dessen Magnetfeld ein starkes elektrisches Feld induziert, durch das geladene Teilchen zu hohen Energien beschleunigt werden. Auf diese Weise entsteht ein hauptsächlich aus relativistischen Elektronen und Positronen bestehender Pulsarwind. Trifft der Pulsarwind auf das interstellare Medium, so bildet sich eine Schockwelle aus, an der insbesondere Elektronen auf Energien von bis zu 100 TeV beschleunigt werden. Die Synchrotron–Emission dieser Elektronen liegt im Röntgenbereich. γ–Quanten entstehen dann analog zu den Prozessen in Supernovae durch inverse Compton–Streuung am infraroten Sternlicht.

Die im Allgemeinen sehr kleinen Photonenflüsse in der TeV–γ–Astronomie werden wegen seiner zeitlichen Konstanz in Einheiten des Krebs–Flusses angegeben, der $F(\epsilon \geq \text{ 1TeV}) \simeq 10^{-11}$ Photonen pro Quadratzentimeter und Sekunde integriert über alle Energien oberhalb 1 TeV beträgt.

2.2.3 Aktive Galaxienkerne

Als aktiv bezeichnet man solche Sternsysteme, deren Kern eine überdurchschnittliche Luminosität in vielen Wellenlängenbereichen aufweist. Obwohl im Kern einer Galaxie nur ein geringer Teil der Gesamtmasse gebunden ist, überstrahlt der Kern in solchen Sternsystemen seine Muttergalaxie ([PET97]).

Aufbau einer Aktiven Galaxie

Die Beobachtungen ergeben das folgende Bild vom Aufbau einer Aktiven Galaxie ([UNS99]):

- Als Motor der Energiegewinnung fungiert ein kompaktes massives Objekt von $10^8 \ldots 10^{10}$ Sonnenmassen – höchstwahrscheinlich ein schwarzes Loch – das einige Sonnenmassen an Materie aus der Muttergalaxie pro Jahr akretiert. Aufgrund des Drehimpulserhaltungssatzes kann Materie aus der Galaxie nicht radial einströmen, sondern formt eine toroidale Akretionsscheibe von zirka 1 pc Größe. Drehimpuls wird durch viskose oder turbulente Prozesse abgegeben, so dass die Materie schließlich eingesogen werden kann. Die heiße Akretionsschreibe ist die Quelle für starke Kontinuumsstrahlung im Optischen und Ultravioletten.

- Um das schwarze Loch bewegen sich Gaswolken, die von der zentralen Quelle ionisiert und zum Leuchten angeregt werden (*broad line emission regions*). Man kann diese Emissionslinien beobachten und daraus die Masse des Zentralobjekts abschätzen: Dichter am Zentrum liegende Wolken zeigen aufgrund ihrer höheren Bahngeschwindigkeit dopplerverbreiterte Linien, während für die entfernteren Wolken schmalere Linien charakteristisch sind.

- Das Zentralgebiet wird von einem gegenüber optischer Strahlung undurchlässigen Staubtorus in der Symmetrieebene der Muttergalaxie umgeben. Dieser Staubtorus verhindert eine direkte Beobachtung bei kleinen Inklinationswinkeln.

- Entlang der Symmetrieachse der Akretionsscheibe werden in entgegengesetzte Richtungen zwei stark gebündelte aus Plasma bestehende Jets ausgestoßen. Das Plasma erzeugt bei seinem Auftreffen auf das intergalaktische Medium intensive Radiostrahlung über die Synchrotronemission relativistischer Elektronen. Die Ausdehnung der Jets übertrifft die der Muttergalaxie um ein Vielfaches.

In dem heutigen Verständnis ist die Aktivität in der Kernregion ein evolutionärer Zustand jeder Galaxie. Gegenwärtig befinden sich etwa 10% der Sternsysteme in einem Zustand hoher Aktivität ([KEM99]).

BL–Lacertae–Objekte

BL–Lacertae–Objekte sind Aktive Galaxien, deren Jetrichtung kollinear mit der Sichtlinie ist. Durch die hohe Strömungsgeschwindigkeit, mit der das Plasma in den Jets ausgestoßen wird, kommt es neben der starken Vorwärtsrichtung der Emission zu relativistischen Effekten, die eine Verzerrung der Energie– und Zeitskala verursachen.

Bewegt sich das Emissionsgebiet in dem Jet eines aktiven galaktischen Kerns bei der Rotverschiebung z mit der Geschwindigkeit v auf den Beobachter zu, und bildet die Jetachse einen Winkel θ mit der Sichtlinie, so erscheint das Zeitintervall δt zwischen zwei Emissionsprozessen auf $\delta t\prime = D^{-1} \cdot \delta t$ verkürzt; die Energie ϵ der Strahlung erscheint auf $\epsilon\prime = D \cdot \epsilon$ erhöht, wobei

$$D^{-1} = (1+z) \cdot \Gamma \cdot (1 - \beta \cos\theta) \qquad \text{mit} \qquad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.1}$$

Diesen Zusammenhang bezeichnet man als „relativistic beaming“; der Lorentzfaktor Γ ist ein wichtiger Parameter zur Erklärung der Spektren und der Zeitvariabilität der *BL–Lacertae*–Objekte. Ein typischer Wert für den Lorentzfaktor ist $\Gamma \simeq 7 \ldots 8$.

γ–Emission von *BL–Lacertae*–Objekten

Die Spektren der *BL–Lac*–Objekte Mkn 421 ([AHA99b]) und Mkn 501 ([AHA99c]) sind in Abbildung 2.3 dargestellt:

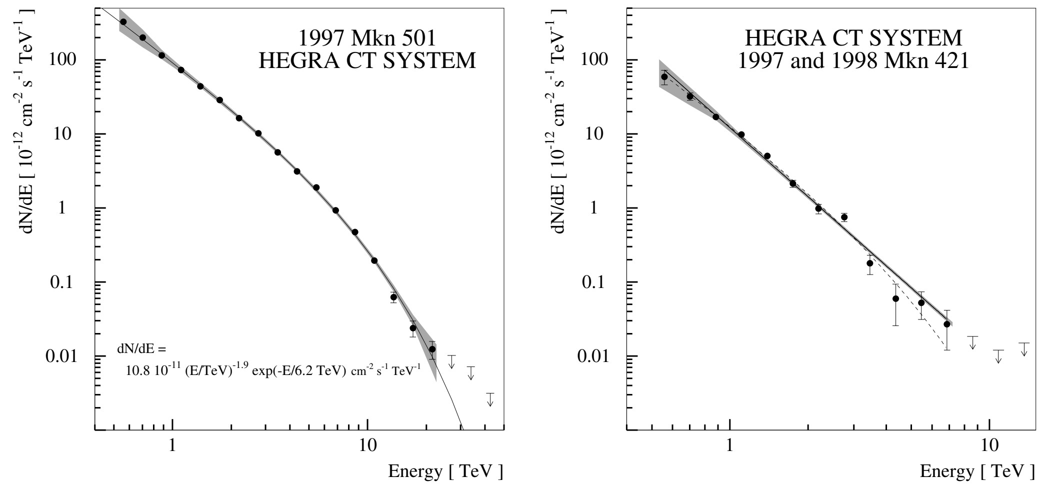


Abbildung 2.3: *Spektren der BL–Lac–Objekte Mkn 501 (links) und Mkn 421 (rechts)*

In den relativistischen Strömungen innerhalb des Jets wird die Existenz von Schockwellen angenommen, die in der Lage sind, geladene Hadronen und Leptonen auf Energien von bis zu 10^{18} eV zu beschleunigen. Die Emission von γ–Quanten kann dabei sowohl über die hadronische als auch über die leptonische Komponente erfolgen.

- hadronische Primärkomponente
  Wegen der geringen Materiedichte in den Jets erfolgt der Energieverlust der hochenergetischen Protonen fast ausschließlich über die Wechselwirkung mit niederenergetischen Photonen (Synchrotronphotonen aus der ebenfalls vorhandenen leptonischen Komponente oder

Photonen aus der Akretionsscheibe) über Photodisintegration und der Produktion von Pionen. Die Gammaquanten aus dem Zerfall der neutralen Pionen erzeugen mit derselben Photonenpopulation e^+e^-–Paare, die eine elektromagnetische Kaskade auslösen und so γ–Quanten produzieren . Erforderlich für dieses Modell sind relativ hohe primäre Protonenergien.

Zur Produktion von Pionen kann es auch kommen, wenn der Jet auf dichte Materie trifft. Die Materie wirkt anstatt der Photonen als Target für die Pion-Produktion. γ–Quanten entstehen auch in diesem Bild durch den π^0–Zerfall.

- leptonische Primärkomponente
  In den starken Magnetfeldern innerhalb des Jets werden γ–Quanten als Synchrotronstrahlung im Röntgenbereich abgestrahlt, wenn sich relativistische Elektronen auf Schraubenbahnen um die magnetischen Feldlinien bewegen. Erfahren diese γ–Quanten inverse Compton-Stöße mit Elektronen derselben Population, so werden sie zu TeV–Energien beschleunigt.

  Das Spektrum der γ–Emission läßt sich in diesem *Synchrotron–Self–Compton–Modell* bis zu Energien von zirka 10 TeV durch ein Potenzgesetz beschreiben, das bei höheren Energien durch eine Exponentialfunktion abgeschnitten wird. Diese Krümmung des Spektrums kann verschiedene Ursachen haben, wie zum Beispiel die Streuung der TeV–Photonen an Photonen der kosmischen Infrarot– oder Mikrowellenfelder oder eine Krümmung des Elektronenspektrums.

Die simultan im Röntgen– und γ–Bereich vorgenommenen „multi–wavelength–campaigns“, wobei mit HEGRA und dem Röntgen–Satelliten RXTE die Aktiven Galaxien Mkn 501 und Mkn 421 beobachtet wurden, favorisieren wegen der engen Korrelation der Röntgen– und der γ–Emission auf einer Zeitskala von 12 Stunden das leptonische Synchrotron–Self–Compton–Modell ([KRA99]).

2.2.4 Weitere Quellen

Im Folgenden sind Typen von Quellen aufgelistet, von denen TeV–γ–Strahlung erwartet wird und die durch die nächste Generation von Čerenkov–Teleskopen beobachtbar sein sollten, ohne dabei genauer auf die Mechanismen der Energiegewinnung oder Teilchenbeschleunigung einzugehen:

- Molekülwolken
- Mikroquasare
- γ–Strahlung vom Zentrum der Milchstraße
- Starburst–Galaxien
- Galaxiencluster
- γ–Ray–Bursts
- Neutralino–Annihilation
- Zerfälle topologischer Defekte

Die Spektren folgen bei allen Quellen im betrachteten Energiebereich Potenzgesetzen der Form $F(E) \sim E^{-\alpha} \cdot \exp(-E/E_{\mathrm{cutoff}})$, mit $\alpha \sim 2 \ldots 3$. Die zu detektierenden Flüsse betragen $10^{-2} \ldots 1$ in Einheiten des Flusses des Krebsnebels.

Kapitel 3

Entwicklung von Schauern in der Atmosphäre

3.1 Entstehung von Luftschauern

Trifft ein Teilchen der primären kosmischen Strahlung auf die Atmosphäre, so kommt es nach einer für das Teilchen charakteristischen Weglänge zu einer Wechselwirkung mit den Molekülen der Luft. Bei dieser Wechselwirkung entstehen geladene Sekundärteilchen, die auf ihrem Weg durch die Atmosphäre durch Ionisation und Bremsstrahlung Energie verlieren, an den Coulomb–Feldern der Atomkerne gestreut werden und Čerenkov–Licht emittieren, bis sie durch weitere Reaktionen mit den Luftmolekülen wiederum neue Teilchen erzeugen. So entsteht eine Lawine von Teilchen, die bis zu einer maximalen Teilchenzahl anwächst, die erreicht wird, wenn die Teilchenenergie nicht mehr zur Produktion neuer Teilchen ausreicht.

Je nach Art des Primärteilchens unterscheidet man zwischen elektromagnetischen Luftschauern, die durch Photonen und Elektronen ausgelöst werden, und hadronischen Schauern, bei denen Protonen oder Atomkerne die Teilchenkaskade verursachen.

3.1.1 Ionisation und Vielfachstreuung

Ionisation

Der Energieverlust geladener Teilchen durch Ionisation der Luftmoleküle wird durch die Bethe–Bloch–Formel beschrieben:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{Z^2\kappa_1}{\beta^2}\left[\log(\gamma^2-1)-\beta^2+\kappa_2\right] \tag{3.1}$$

mit $\kappa_1 = 1.53\cdot 10^{-4}$ GeV/(g/cm^2) und $\kappa_2 = 9.38$ für Luft. Z steht dabei für die Gesamtladung, γ und β sind Lorentzfaktor bzw. die Geschwindigkeit in Einheiten von c des einfallenden Teilchens der Masse M. Die Ionisationsverluste fallen für wachsende Teilchengeschwindigkeiten, da die Wechselwirkungszeit zwischen Feld und Teilchen abnimmt. Nach dem Durchlaufen eines Minimums bei einer Energie von $\simeq Mc^2$ erfolgt ein langsamer logarithmischer Anstieg, der durch relativistische Korrekturen verursacht wird.

Streuung

Beim Durchgang durch Materie werden Teilchen an den Coulomb–Feldern der Atomkerne gestreut und aus ihren Bahnen abgelenkt. Mit Hilfe der Rutherford–Formel für den Wirkungsquerschnitt läßt sich im Grenzfall kleiner Winkel ein mittlerer Streuwinkel θ_0 für Teilchen der Ladung Z, des Impulses p (in MeV/c) und der Geschwindigkeit βc näherungsweise errechnen ([PDG90]):

$$\theta_0 = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} \cdot Z \tag{3.2}$$

Die Streuwinkel folgen einer Normalverteilung, deren Breite proportional zur Wurzel der Schichtdicke $\sqrt{x}$ anwächst:

$$P(\theta, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}\theta_0} \cdot \exp\left(-\frac{\theta^2}{x\theta_0^2}\right) \tag{3.3}$$

Die Schichtdicke x wird dabei in Einheiten der Strahlungslänge angegeben.

3.1.2 Elektromagnetische Schauer

Die wesentlichen Prozesse, die zur Teilchenproduktion in einem elektromagnetischen Luftschauer beitragen, sind Bremsstrahlung und Paarbildung.

Bremsstrahlung

Geladene Teilchen werden beim Durchqueren von Materie an den Coulomb–Feldern der Atomkerne abgelenkt und erfahren dabei eine starke Beschleunigung, die dazu führt, dass Bremsstrahlungsphotonen emittiert werden. Der Energieverlust der Teilchen wird durch

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Bremsstrahlung}} = \frac{2e^4}{137c^4} \cdot \frac{N}{A} \cdot Z(Z+1) \cdot \frac{E}{\mu^2} \cdot \ln\left(\frac{138}{\sqrt[3]{Z}}\right) \tag{3.4}$$

beschrieben, wobei N die Avogadro-Zahl und E bzw. μ für Energie und Masse des Teilchens stehen. Der Energieverlust pro Wegstrecke ist also proportional zur Teilchenenergie. Die Proportionalitätskonstanten werden zu der sog. Strahlungslänge X_0 zusammengefasst. Nach dem Durchlaufen einer Strecke $x = X_0$ hat das Teilchen den Bruchteil $1 - 1/e$ seiner Anfangsenergie in Form von Bremsstrahlungsphotonen emittiert.

Die Strahlungslänge für Elektronen beträgt 37.2 g/cm^2 in Luft, was auf Meereshöhe einer Strecke von zirka 300 m entspricht. Die Emission der Bremsstrahlungsphotonen ist für hochenergetische Elektronen in Vorwärtsrichtung fokussiert; das Photon wird in einen Kegel mit dem mittleren Öffnungswinkel von $\langle\theta\rangle \simeq 1/\gamma = \mu c^2/E$ um die Elektronenbahn emittiert.

Paarbildung

Wenn die Photonenenergie die doppelte Elektronenruhemasse übersteigt, kann das Photon in ein Elektron–Positron–Paar konvertieren. Wegen Energie– und Impulserhaltung geschieht dieser Prozess im Feld eines Atomkerns, der als dritter Reaktionspartner den Rückstoß auffängt. Die Wechselwirkungslänge für Paarbildung unterschiedet sich nur durch kinetische Faktoren von der des Bremsstrahlungsprozesses, da es sich im Prinzip um den gleichen physikalischen Vorgang handelt. Also lässt sie sich als Vielfaches der Strahlungslänge schreiben:

$$X_{0,\gamma\to e^+e^-} = \frac{9}{7} X_{0,\text{Bremsstrahlung}} \tag{3.5}$$

Schauer–Modell von Heitler

Für elektromagnetische Schauer existiert ein einfaches Modell, das auf den Grundprozessen Bremsstrahlung und Paarbildung basiert und alle wesentlichen Abhängigkeiten richtig vorhersagt (Abbildung 3.1). Energieverluste durch Ionisation werden vernachlässigt, was bei hohen Teilchenenergien gerechtfertigt ist.

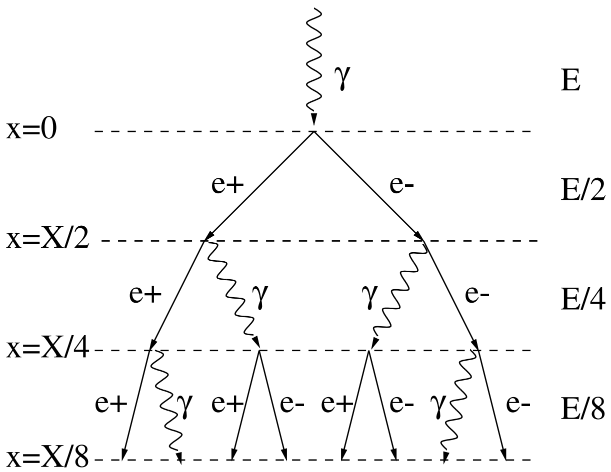


Abbildung 3.1: *Schauer–Modell von Heitler: Es werden die beiden Prozesse Bremsstrahlung und Paarbildung berücksichtigt, wobei die Strahlungslängen gleichgesetzt werden.*

Bei der primären Reaktion erzeugt ein hochenergetisches Photon beim Auftreffen auf die Atmosphäre innerhalb der ersten Strahlungslänge ein Elektron–Positron–Paar. Dabei wird die Energie E_0 des Photons aufgeteilt, so daß beide Leptonen die halbe Energie $E_0/2$ erhalten, abzüglich der Energie zur Erzeugung von Elektron und Positron. Dieser Energiebetrag $(2m_ec^2)$ kann vernachlässigt werden. Die Leptonen erzeugen innerhalb der nächsten Strahlungslänge je ein Bremsstrahlungsphoton mit der Hälfte ihrer Energie.

Nach m Wechselwirkungslängen, die für beide Prozesse der Einfachheit halber gleichgesetzt werden, besteht die Kaskade aus

$$N(m) = 2^m \text{ Teilchen der Energie } E(m) = E_0 \cdot 2^{-m}. \tag{3.6}$$

Man definiert eine kritische Energie E_{krit}, bei der der Energieverlust pro Weglänge durch den Bremsstrahlungsprozess gleich dem Energieverlust durch Ionisation wird. Fällt die Teilchenenergie unter E_{krit}, so werden keine neuen Teilchen produziert und der Schauer stirbt aus.

Die Tiefe des Schauermaximums in Einheiten der Strahlungslänge ergibt sich zu:

$$E(m) = E_0 \cdot 2^{-m} = E_{\text{krit}} \Rightarrow m_{\text{max}} = \frac{\ln(E_0/E_{\text{krit}})}{\ln 2}, \tag{3.7}$$

bei der der Schauer aus

$$N_{\text{max}} = \exp(m_{\text{max}} \cdot \ln(2)) = \frac{E_0}{E_{\text{krit}}} \tag{3.8}$$

Teilchen besteht.

Zusammenfassend zeigt dieses einfache Modell alle wesentlichen Charakteristika eines elektromagnetischen Schauers:

- Bis zum Erreichen der Schauertiefe steigt die Teilchenzahl exponentiell an.
- Die maximale Teilchenzahl ist proportional zur Energie E_0 des Primärteilchens.
- Die Schauertiefe ist proportional zum Logarithmus der Primärenergie. Für einen Schauer mit 1 TeV Primärenergie liegt das Schauermaximum in 8 km Höhe.

3.1.3 Hadronische Schauer

Hochenergetische Hadronen kollidieren mit Kernen in den oberen Atmosphärenschichten. Dabei entstehen außer Bruchstücken des Targetkerns hauptsächlich Mesonen (π, K), Nukleonen (n, p) und Hyperonen (Δ, Λ, Σ, Ξ), die eine hadronische Kaskade ausbilden.

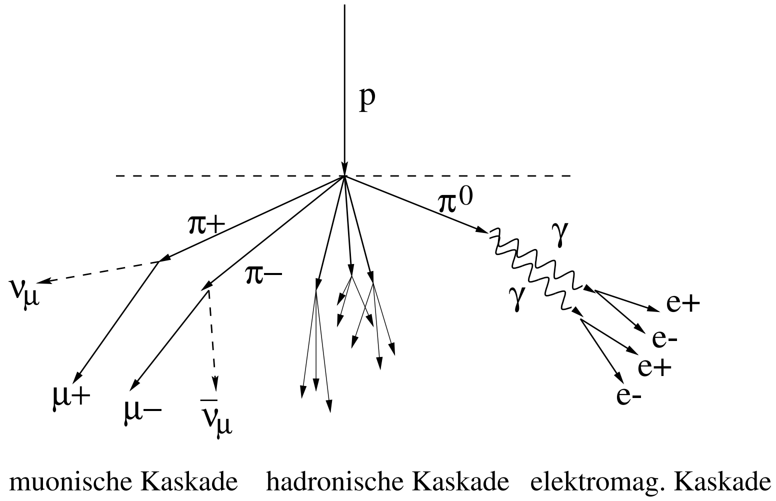


Abbildung 3.2: *Ein primäres Hadron löst einen Schauer bestehend aus drei Komponenten aus.*

Neutrale π–Mesonen haben eine mittlere Lebensdauer von $(8.3 \pm 0.6) \cdot 10^{-17}$ Sekunden und zerfallen in zwei Photonen, woraus sich elektromagnetische Kaskaden entwicklen (Abbildung 3.1.3); geladene π–Mesonen zerfallen nach einer Zeit von $(2.603 \pm 0.002) \cdot 10^{-8}$ sec in Myonen der gleichen Ladung zusammen mit dem entsprechenden Neutrino ($\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ bzw. $\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$).

3.1.4 Unterschiede in der Schauerentwicklung

- In hadronischen Schauern wird ein Großteil der Energie zur Bildung von Myonen, Neutrinos und sekundären Hadronen verbraucht, so dass hadronische Schauer dreifacher Primärenergie erst vergleichbar viele Elektronen und Positronen erzeugen wie elektromagnetische Schauer.
- Aufgrund der größeren Wechselwirkungslänge (85 g/cm^2 im Vergleich zur Strahlungslänge von 35 g/cm^2) dringen hadronische Schauer tiefer in die Atmosphäre ein.

- In der lateralen Entwicklung werden elektromagnetische Schauer durch die Streuung der Elektronen bestimmt. Im Gegensatz dazu tragen bei hadronischen Schauern die Transversalimpulse der Sekundärteilchen zusätzlich zu einer signifikanten Verbreiterung bei.

3.2 Emission von Čerenkov–Licht

3.2.1 Čerenkov–Effekt

Ein geladenes Teilchen, das sich mit einer Geschwindigkeit v durch ein dielektrisches Medium mit der Brechungsindex n bewegt, verursacht in der Nähe der Teilchenbahn durch sein elektrisches Feld eine vorübergehende Polarisation des Mediums ([JAC82]). Die Moleküle schwingen, nachdem das Störfeld des Teilchens verschwunden ist, wieder in die Ruhelage zurück, wobei sie als klassische Dipole wirken und elektromagnetische Strahlung emittieren [1].

- Bewegt sich das Teilchen mit einer Geschwindigkeit v durch das Medium, die kleiner als die Phasengeschwindigkeit von Licht $c_{\mathrm{ph}} = c/n$ ist, dann sind die Dipole kugelsymmetrisch angeordnet. Die von ihnen emittierten Elementarwellen interferieren destruktiv.
- Übersteigt die Teilchengeschwindigkeit v die Phasengeschwindigkeit c_{ph}, so ist die Symmetrie teilweise gebrochen: Senkrecht zur Teilchenbahn sind die Dipolmomente radialsymmetrisch angeordnet, parallel zur Teilchenbahn schwingen die Dipole in Phase. Nach dem Prinzip von Huygens interferieren diese Wellenzüge konstruktiv und bilden eine kegelförmige Wellenfront aus (vgl. Abbildung 3.3), ähnlich dem Mach'schen Kegel bei sich mit Überschallgeschwindigkeit bewegenden Flugzeugen.

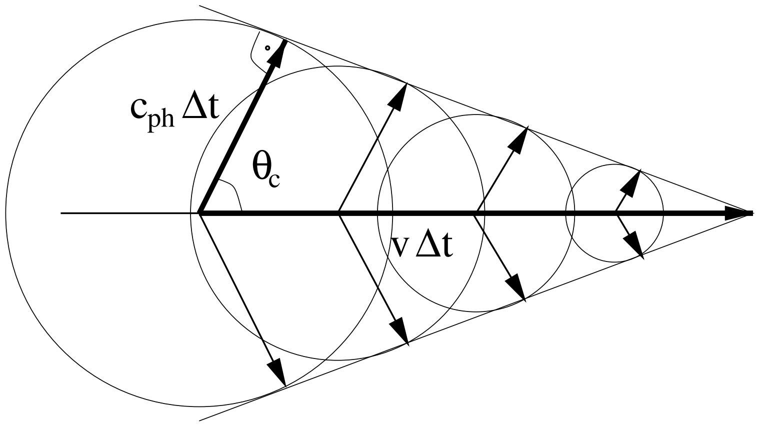


Abbildung 3.3: *Čerenkov–Effekt: konstruktive Interferenz ($v > c_{ph} = c/n$).*

Wie aus der Zeichnung 3.3 ersichtlich, legt in einem Zeitintervall Δt eine Elementarwelle die Wegstrecke $c_{\mathrm{ph}} \cdot \Delta t$ zurück; in der gleichen Zeitspanne durchquert das Teilchen die Strecke $v \cdot \Delta t$. Damit ergibt sich für den Winkel θ_c, unter dem das Čerenkov–Licht zur Teilchenbahn emittiert wird:

$$\cos\theta_c = \frac{c_{\mathrm{ph}} \cdot \Delta t}{v \cdot \Delta t} = \frac{c}{n \cdot v} = \frac{1}{\beta n}. \tag{3.9}$$

[1] Eine quantenmechanische Behandlung des Čerenkov–Effekts findet man in [JEL58]

Aus $\cos\theta_c \leq 1$ folgt $c/v \leq n$. Da die Teilchengeschwindigkeit immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist, ergeben sich so wichtige Folgerungen für die Čerenkov–Emission:

- Čerenkov–Strahlung kann nur in Wellenlängenbereichen emittiert werden, für die der Brechungsindex des Mediums größer als 1 ist.
- Die minimale Energie, die ein Teilchen der Masse m aufweisen muss, um Čerenkov–Strahlung zu emittieren, ergibt sich aus der Schwellengeschwindigkeit β_c zu:
$$E_{min} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-n^{-2}}}. \tag{3.10}$$
- Die Zahl dN der pro Wegelement dx in ein Wellenlängenintervall $d\lambda$ emittierten Čerenkov-Photonen ergibt sich mit der Feinstrukturkonstanten α und der Teilchenladung z zu:
$$\frac{dN}{dx} = 2\pi\alpha z^2 \cdot \int_{\beta\ n(\lambda)\geq 1} \left(1 - \frac{1}{n(\lambda)^2\beta^2}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^2}. \tag{3.11}$$
Unter Vernachlässigung der Dispersion $(n(\lambda) \neq n_0)$ lässt sich die Integration ausführen und man erhält:
$$\frac{dN}{dx} = 2\pi\alpha z^2 \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^2} = 2\pi\alpha z^2 \cdot \sin^2\theta_c \cdot \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 \cdot \lambda_1}. \tag{3.12}$$

Zahlenbeispiel:
Die Schwellengeschwindigkeit β in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit beträgt auf 2200 Metern Höhe über dem Meeresspiegel, wo der Brechungsindex der Luft auf den Wert $n = 1.000233$ abgesunken ist, $\beta = 0.999777$. Der Lorentzfaktor beträgt dann $\gamma = 47.3$. Elektronen über einer Energie von 24.2 MeV können somit Čerenkov–Licht emittieren. Für Elektronen der Energie 1 GeV ergibt sich für den Čerenkov–Winkel $\theta_c = 1.23°$. Diese Elektronen emittieren pro Meter Wegstrecke im Mittel $dN/dx = 16.4$ Photonen, in den für HEGRA interessanten Wellenlängenbereich zwischen 300 nm und 600 nm.

3.2.2 Atmosphärisches Čerenkov–Licht

Schauerteilchen durchqueren mit der Atmosphäre ein Medium, dessen Dichte und Brechungsindex sich kontinuierlich mit der Höhe ändern. Die Dichte und die ihr proportionale Brechungsindex lässt sich in der isotherm angenäherten Atmosphäre durch die barometrische Höhenformel beschreiben:
$$n(h) = 1 + \eta_0 \cdot \exp(-\frac{h}{H_0}) \tag{3.13}$$
$1+\eta_0 = 1.00029$ ist die Brechungsindex auf Meereshöhe und $H_0 = 8400$ m die bekannte Skalenhöhe.

Abbildung 3.4 zeigt die Čerenkov–Lichtverteilung am Boden für einen γ–Schauer und einen hadronischen Schauer. Während mit abnehmender Höhe die Schwellenenergie zur Emission von Čerenkov–Strahlung sinkt, nimmt der Čerenkov–Winkel zu. Das führt bei γ–Schauern zu einer Fokussierung des Lichtes auf einen Kreisring.

Die Streuphänomene führen zu einer Verwaschung der Lichtverteilung, die sich aus der Überlagerung der Čerenkov–Emission der einzelnen Elektronen ergibt. Dieser Effekt ist bei hadronischen Schauern verglichen mit γ–Schauern stärker ausgeprägt, bedingt durch die Überlagerung mehrerer Einzelkaskaden. Bei einem γ–Schauer ist die Photonendichte in einem Kreisring mit den Radien 80 m bzw. 120 m um den Schauer–Kern homogen und fällt zur Mitte hin leicht ab.

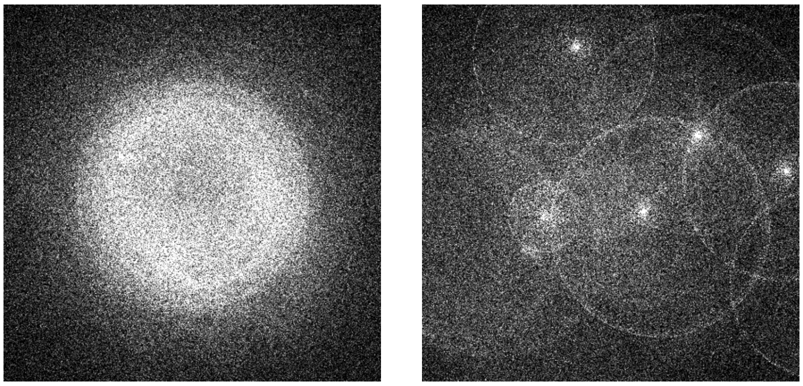


Abbildung 3.4: *Čerenkov–Lichtverteilung am Boden für zwei verschiedene Primärteilchen: γ–Quant mit einer Energie von 300 GeV (links) und Proton mit 1 TeV (rechts). (Monte–Carlo–Simulation von K. Bernlöhr mit dem CORSIKA–Code). Der Bildausschnitt umfasst eine Fläche von 200m × 200m.*

3.2.3 Lichtschwächung in der Atmosphäre

Čerenkov–Licht unterliegt bei seinem Durchgang durch die Atmosphäre verschiedenen Mechanismen, die zu einer Abschwächung führen. Die Abnahme der ursprünglichen Intensität I_0 wird durch das Lambert–Beer'sche Gesetz beschrieben:

$$dI = -\alpha \cdot I_0 \cdot dx \Rightarrow I(x) = I_0 \exp(-\alpha \cdot x), \tag{3.14}$$

wobei sich der Absorptionskoeffizient α aus drei Beiträgen zusammensetzt:

$$\alpha = \alpha_{\text{Rayleigh}} + \alpha_{\text{Mie}} + \alpha_{\text{Ozon}}. \tag{3.15}$$

Rayleigh–Streuung

Die Streuung von Licht an polarisierbaren Teilchen, die kleiner sind im Vergleich zu der Wellenlänge des Lichts, wird durch die Rayleigh-Streuformel beschrieben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi^2}{\lambda^4 \rho} \cdot (n-1) \cdot \left[1 + \cos^2(\phi)\right]. \tag{3.16}$$

ρ bezeichnet dabei die Dichte der Atmosphäre. Durch die λ^{-4}–Abhängigkeit wird vor allem kurzwelliges Licht stark gestreut. Da der Čerenkov–Winkel sehr klein ist, führen sehr kleine Ablenkwinkel ϕ zu dem Verlust des gestreuten Photons aus dem Čerenkov–Lichtkegel. Durch Integration über den Raumwinkel erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot} und kann damit den Extinktionskoeffizent α_{Rayleigh} ausdrücken:

$$\alpha_{\text{Rayleigh}} = \rho \cdot \sigma_{\text{tot}}. \tag{3.17}$$

Mie–Streuung

Ist die Wellenlänge des Lichts vergleichbar mit der typischen Teilchengröße, so spricht man von Mie–Streuung. Für eine Standardverteilung von Partikelgrößen wie die Junge–Verteilung ergibt sich für den Absorptionskoeffizienten (siehe [ROE92]):

$$\alpha_{\text{Mie}} \simeq \lambda^{-(1\ldots1.5)}. \tag{3.18}$$

Absorption durch Ozon

Für die Absorption von Čerenkov–Licht durch Photodissoziation von Ozon ist die Hartley–Bande im Wellenlängenbereich von 200 nm bis 320 nm von Bedeutung ([ROE92]).

Abbildung 3.5 vermittelt einen Eindruck, wie das Čerenkov–Spektrum durch die verschiedenen Mechanismen geschwächt wird.

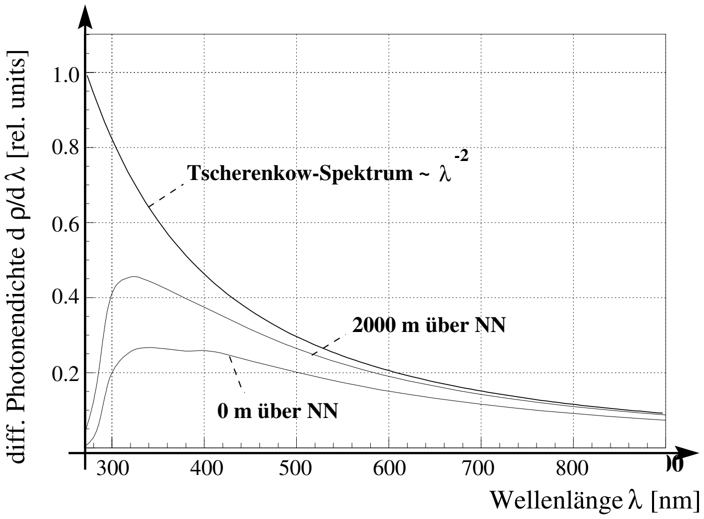


Abbildung 3.5: *Abschwächung des ursprünglichen λ^2–Spektrums des Čerenkov–Lichts.*

Kapitel 4

HEGRA–Čerenkov–Teleskope

HEGRA steht für **H**igh **E**nergy **G**amma **R**ay **A**stronomy und bezeichnet eine internationale Kollaboration mehrerer physikalischer Institute. Auf dem Gelände des Observatorio del Roque de los Muchachos (28.8°N, 17.9°W, 2200m über dem Meeresspiegel) auf der kanarischen Insel La Palma betreibt die HEGRA–Kollaboration mehrere Detektoren zur Erforschung der kosmischen Strahlung. Von besonderem Interesse sind die Čerenkov–Teleskope, die als stereoskopisches System konfiguriert sind, da sie gegenüber herkömmlichen Detektortypen neben einer vergleichsweise niederen Energieschwelle wesentlich verbesserte Eigenschaften, vor allem in Bezug auf Winkel– und Energieauflösung haben.

4.1 Aufbau der HEGRA–Čerenkov–Teleskope

Die HEGRA–Systemteleskope sind an den Ecken und in der Mitte eines Quadrates mit 100 m Seitenlänge errichtet. Der Abstand von 70 m bzw. 100 m zwischen den Teleskopen ist so festgelegt, dass eine große Zahl von Schauern von mehreren Teleskopen gleichzeitig detektiert, andererseits aber eine möglichst große Fläche überdeckt wird (vgl. Abbildung 4.1).

4.1.1 Aufbau eines Systemteleskops

Nachführung

Die Teleskope sind azimutal montiert, die Nachführung geschieht über zwei Schrittmotoren, wobei Winkeldekoder die Ausrichtung des Teleskops messen und über einen Regelkreis auf 1.3 Bogenminuten genau ausrichten. Mechanische Verformungen des Spiegelträgers oder der Haltemasten der Kamera sind reproduzierbar und werden auf 0.01° genau korrigiert ([PUE96]).

Reflektor

Der Spiegel des Teleskops besitzt eine Fläche von 8.5 m^2 und ist aus 30 Facetten zusammengesetzt. Jede dieser Facetten besteht aus einer 2 cm dicken sphärisch geschliffenen Glasplatte mit einer Brennweite von 5 m, die mit Aluminum bedampft und zum Schutz mit einer Quarzschicht überzogen ist. Die Facetten sind auf einem sphärischen Spiegelträger mit der doppelten Brennweite gemäß dem Davies–Cotton–Design zusammengesetzt ([DAV57]).

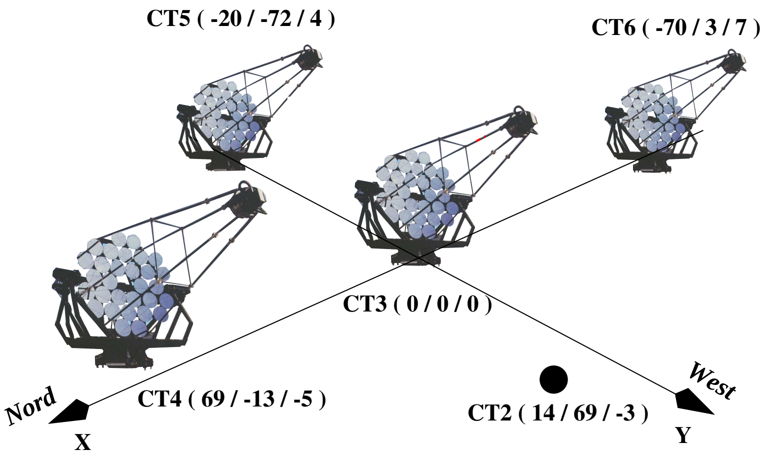


Abbildung 4.1: *Anordnung der fünf HEGRA-Systemteleskope und das der Analyse zugrundeliegende Koordinatensystem (Die Koordinaten der Teleskope sind in Metern angegeben.)*

Kamera

Die Kamera besteht aus 271 auf einem hexagonalen Gitter angeordneten Photomultipliern. Um die Lichtsammlung zu optimieren, befinden sich innenverspiegelte Trichter als Lichtleiter vor den Photomultipliern. Die Photomultiplier sind in der Lage, einzelne Photonen zu detektieren. Das Photomultiplier–Signal wird elektronisch verstärkt und durch ein Flash–ADC–System mit einer Taktfrequenz von 120 MHz und einem dynamischen Bereich von 8 bit digitalisiert. Um die Photomultiplier–Signale, die am Eingang des Digital–Analog–Konverters eine Länge von typischerweise τ = 16 nsec haben, mit der Abtastfrequenz von 120 MHz digitalisieren zu können, ist es erforderlich, die Pulse zeitlich zu verlängern, was duch einen Pulsformer erreicht wird.

4.1.2 Triggerschema

Die Datenauslese wird erst gestartet, wenn eine zweistufige Triggerbedingung erfüllt ist:

1. In der ersten Stufe wird überprüft, ob zwei benachbarte Pixel in der Kamera innerhalb von 12 nsec über einer vorgegebenen Schwelle liegen (topologischer Trigger). Ist diese Bedingung erfüllt, wird der Teleskoptrigger ausgelöst.
   Durch diesen Trigger werden Untergrundereignisse durch Nachthimmelslicht und elektronisches Rauschen unterdrückt.

2. Haben in der zweiten Stufe mindestens zwei der fünf Systemteleskope innerhalb von 70 nsec getriggert, wird die Datennahme gestartet: Die in Ringpuffern zwischengespeicherten Pixelamplituden werden zu der Zentralstation geschickt und auf Festplatte gespeichert.
   Der Systemtrigger unterdrückt die Aufzeichnung von Ereignissen, die durch lokale Myonen erzeugt werden. Diese Myonen sind bei Einzelteleskopen problematisch.

4.1.3 Kalibration der Messdaten

Die unterschiedlichen Verstärkungen der einzelnen Kanäle müssen vor der weiteren Verwendung der Daten ausgeglichen werden. Dazu dienen die sog. Laserruns:

Über ein Quarzfaserkabel werden Lichtpulse eines Lasers auf einen Szintillator geleitet, der in der Mitte des Spiegelträgers angebracht ist. Die Kamera wird von dem Szintillator, der ein breites Spektrum erzeugt, homogen ausgeleuchtet und registriert den Lichtblitz wie ein echtes Schauerereignis. Aus dem Mittelwert über 100 Laserpulse können die relativen Unterschiede in den Verstärkungsfaktoren der einzelnen Kanäle bestimmt werden.

Man kann jetzt die Messdaten auf eine einheitliche Verstärkung normieren und die Amplitude in jedem Kanal durch die Anzahl der Photoelektronen ausdrücken, die von den Photonen aus dem Raumwinkel, den der jeweilige Photomultiplier überblickt, ausgelöst werden.

4.2 Abbildende Čerenkov–Technik

Ein typischer Schauer erzeugt eine ellipsenförmige Lichtverteilung in der Kamera. Aus der Geometrie der Ellipse lässt sich die Geometrie des Schauers rekonstruieren und zusätzlich lassen sich Informationen über die Art des Primärteilchen ableiten.

Bei der Beobachtung einer Quelle sind die Teleskope auf die Quellposition ausgerichtet. Die Entwicklung eines γ–induzierten Schauers verläuft deshalb parallel zur optischen Achse oder unter einem kleinen Winkel dazu. Licht, das unter gleichen Winkeln zur optischen Achse emittiert wurde, wird durch den sphärischen Spiegel des Teleskops wegen seiner Eigenschaft, Winkel abzubilden, auf den selben Punkt in der Kamera abgebildet.

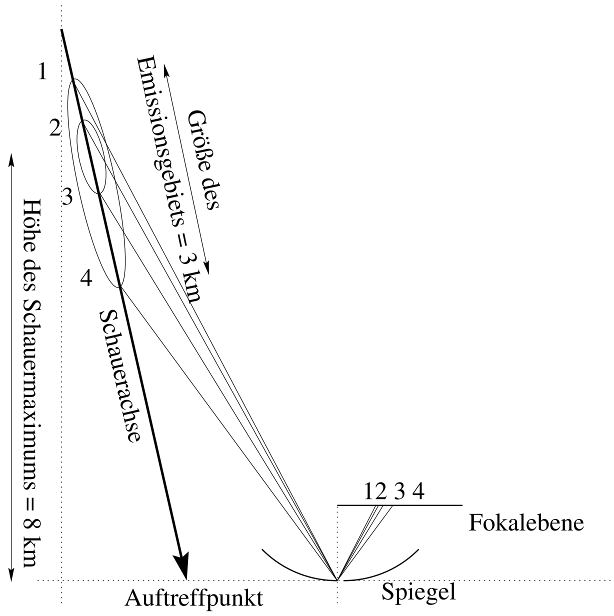


Abbildung 4.2: *Prinzip der Schauer–Abbildung*

Licht, das in großer Höhe emittiert wurde, erreicht den Teleskopspiegel unter einem kleineren Winkel als Licht aus geringerer Höhe und wird deshalb nahe zum Zentrum der Kamera abgebildet. Die

Lichtverteilung entlang der radialen Achse beschreibt deshalb die longitudinale Entwicklung des Schauers (vgl. Abbildung 4.2).

Licht, das auf gleicher Höhe, aber von zwei Punkten, die horizontal voneinander getrennt sind, emittiert wird, wird auch auf zwei Punkte in der Kamera abgebildet, die entlang der tangentialen Richtung voneinander getrennt sind. Damit wird die laterale Schauerentwicklung durch die Lichtverteilung entlang dieser Richtung beschrieben.

4.3 Stereoskopie

Durch die gleichzeitige Registrierung eines Schauers aus verschiedenen Blickrichtungen kann die Geometrie des Schauers aus der Kombination der Schauerbilder eindeutig im Raum rekonstruiert werden.

4.3.1 Rekonstruktion der Schauer–Geometrie

Am einfachsten lässt sich die stereoskopische Rekonstruktion veranschaulichen, die Teleskope auf den Zenith ausgerichtet sind, so dass die optische Achse der Teleskope senkrecht auf dem Erdboden (xy–Ebene) steht. Die Schauerachse bilde mit der optischen Achse einen Winkel θ, dessen Projektion in x–Richtung (y–Richtung) θ_x^0 (θ_y^0) sei, und schneide die xy–Ebene im Punkt (x_0, y_0). Der Schauer soll von zwei parallel ausgerichteten Teleskopen detektiert werden.

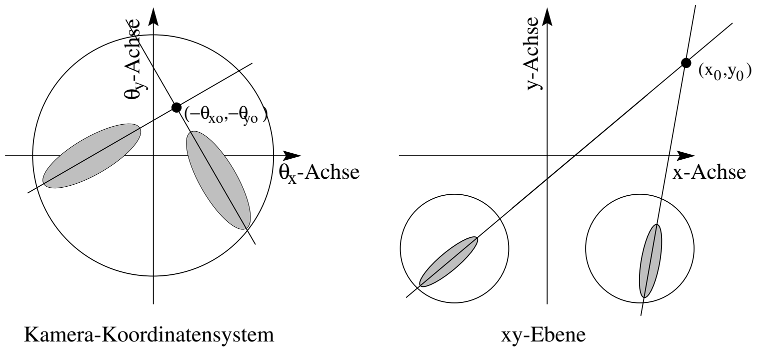


Abbildung 4.3: *Rekonstruktion des Schauerherkunftsorts durch Überlagerung der Schauerbilder in dem Kamerakoordinatensystem (links) und des Schauerauftreffpunkts durch Überlagerung der Schauerbilder in der xy–Ebene (rechts).*

Die Überlagerung der Schauerbilder im Kamerakoordinatensystem liefert den Herkunftsort des Schauers: Durch Schneiden der Verlängerungen der großen Halbachsen der Schauerbilder die Verkippung der Schauerachse gegen die Teleskopachse. Dieser Zusammenhang folgt sofort aus der Eigenschaft des Teleskops, Winkel abzubilden: Die Projektion der Schauerachse in das Kamerakoordinatensystem fällt mit der großen Halbachse der Bildellipse zusammen.

Analog ergibt sich aus der Überlagerung der Bildellipsen in der xy–Ebene durch Schneiden der Verlängerungen der großen Halbachsen der Schauerauftreffpunkt (x_0, y_0) (siehe Abbildung 4.3).

4.3.2 Spektroskopie

Durch die Bestimmung der Schauer–Geometrie, vor allem durch die Rekonstruktion des Schauer–Auftreffpunktes, lässt sich die gemessene Lichtmenge mit der Energie des Primärteilchens bei gegebenem Zenithwinkel in Verbindung setzen, wodurch man eine Energieauflösung von zirka 20% erreicht. Die Asymmetrie in der Anordnung der vier Čerenkov–Teleskope (siehe Zeichnung 4.1) hat dabei keinen Einfluss auf die Güte der Energierekonstruktion ([KOE98]).

Die HEGRA–Čerenkov–Teleskope sind in der Lage, die Energie der Primärteilchens im Bereich von 500 GeV bis 20 TeV zu bestimmen. Die untere Energieschwelle ist dadurch festgelegt, dass die Anzahl der Photonen, die die Kamera registriert, über der Triggerschwelle liegen muss. Auf der anderen Seite saturieren die Photomultiplier und der Analog–Digital–Konverter in der Auslesekette, wenn eine zu große Lichtmenge auf das Teleskop fällt.

4.4 Prinzip der Untergrundmessung

Eine sorgfältige Messung des isotropen hadronischen Untergrunds ist notwendig, um die Signifikanz eines Signals einer γ–Quelle abzuschätzen. Neben der Methode, die Quellregion und eine gleichgroße Untergrundregion abwechselnd unter gleichen Bedingungen zu beobachten („ON–OFF–Mode“), ermöglicht es das große Gesichtsfeld der Čerenkov–Teleskope von $4.3° \times 4.3°$, sowohl die Quellregion als auch die Untergrundregion gleichzeitig zu beobachten. In diesem „Wobble–Mode“ genannten Verfahren werden die Teleskope auf einen Punkt ausgerichtet, der in der Deklination von Messintervall zu Messintervall abwechselnd um $+0.5°$ bzw. $-0.5°$ relativ zur Quellposition verschoben ist.

Der Winkelabstand von $1°$ zwischen den Zentren der Quellregion (ON–Region) und der Untergrundregion (OFF–Region), die hohe Abbildungsqualität der Teleskope und die Rekonstruktion der Schauergeometrie mit einer Genauigkeit von $\simeq 0.1°$ stellen sicher, dass bei Punktquellen wie dem aktiven galaktischen Kern Mkn 501 in einer hinreichend großen Umgebung um die OFF–Position keine γ–Ereignisse zu erwarten sind.

Die gleichzeitige Messung des Untergrunds im Wobble–Modus hat neben der Verdopplung der Messzeit für die Quellmessung auch den Vorteil, dass die Quelle und der Untergrund unter gleichen atmosphärischen Bedungungen und unter gleichem Zenithwinkel beobachtet werden. Die Winkelabweichung zwischen dem Herkunftsort des Schauers und dem Zentrum der ON–Region (OFF–Region) wird mit θ^2_{on} (θ^2_{off}) bezeichnet und folgt mit $c = \cos(\delta_{\text{Quelle}}) \cdot 360°/24\text{h}$ einfach aus:

$$\theta^2_{\text{on}} = c^2 \cdot (\alpha_{\text{Shower}} - \alpha_{\text{Quelle}})^2 + (\delta_{\text{Shower}} - \delta_{\text{Quelle}})^2 \tag{4.1}$$

$$\theta^2_{\text{off}} = c^2 \cdot (\alpha_{\text{Shower}} - \alpha_{\text{OFF–Region}})^2 + (\delta_{\text{Shower}} - \delta_{\text{OFF–Region}})^2. \tag{4.2}$$

Orte auf der Himmelskugel werden dabei in den astronomischen Koordinaten Rektazension (α, entspricht der geographischen Länge, $0\text{h} \leq \alpha \leq 24\text{h}$) und Deklination ($\delta$, entspricht der geographischen Breite, $-90° \leq \delta \leq +90°$) angegeben. Man erwartet einen Exzess von Ereignissen aus dem Zentrum der Quellregion über einem isotropen Untergrund hadronischer Ereignisse.

Kapitel 5

Hillas–Parameter

5.1 Definition der Hillas–Parameter

Eine einfache Parametrisierung der Schauerbilder wurde von *Hillas* vorgeschlagen ([HIL85]). Dabei wird die Lichtverteilung, die die Kamera detektiert hat, durch eine Ellipse beschrieben. Die Berechnung der Kenngrößen der Bildellipse erfolgt, nachdem das Bild geglättet wurde, über die zweiten Momente dieser Amplitudenverteilung.

5.1.1 Glättung der Schauerbilder

Die Berechnung der zweiten Momente ist sehr anfällig gegen vereinzelte Pixel mit hoher Amplitude in großem Abstand vom eigentlichen Schauerbild. Solche Pixeleinträge können durch z.B. Untergrundrauschen erzeugt werden und sind nicht Teil des Schauerbildes. Um solche Pixel von der Berechnung auszuschließen, wendet man eine Prozedur an, die die Pixel des Bildes in Bild– und Randpixel unterteilt. Es werden zwei Schwellen gesetzt, deren Werte typischerweise bei 6 Photoelektronen für die obere Schwelle und bei 3 Photoelektronen für die untere Schwelle liegen.

- Pixel, deren Amplitude über der oberen Schwelle liegt, werden als Bildpixel bezeichnet und bei der Berechnung der zweiten Momente berücksichtigt.
- Pixel, deren Amplitude zwischen der oberen und der unteren Schwelle liegt, und die zu einem Bildpixel benachbart sind, werden ebenfalls bei der Berechnung berücksichtigt und als Randpixel bezeichnet.
- Liegt die Amplitude zwischen der oberen und der unteren Schwelle und ist das Pixel nicht zu einem Bildpixel benachbart, so wird es verworfen.
- Ebenfalls verworfen wird ein Pixel, dessen Amplitude unter der unteren Schwelle liegt.

Das Bild setzt sich also aus Bild– und Randpixeln zusammen, alle anderen Pixel gelten als von Rauschen dominiert und werden durch diese „Tailcut“–Prozedur verworfen.

5.1.2 Zweite Momente und Hillas–Parameter

Bei der Berechnung der Hillas-Parameter geht man von den Momenten der Amplitudenverteilung aus. Möge das i–te Pixel bei den Koordinaten (x_i, y_i) ein Signal A_i detektieren. Der Ursprung des Koordinatensystems liege im Zentrum der Kamera, das Teleskop sei auf die Quelle ausgerichtet.

- Das Moment nullter Ordnung $\sum_i A_i$ liefert die Gesamthelligkeit des Bildes, im Folgenden *SIZE* genannt. Die Gesamthelligkeit des Schauerbildes ist ein Maß für die Energie des Primärteilchens.

- Die Momente erster Ordnung beschreiben die Lage der Ellipse in der Kamera: Der Schwerpunkt (Center of Gravity) $\vec{P}$ hat die Koordinaten $\vec{P} = (\langle x\rangle|\langle y\rangle)$, wobei

$$\langle x\rangle = \frac{\sum_i A_i \cdot x_i}{\sum_i A_i} \text{ und } \langle y\rangle = \frac{\sum_i A_i \cdot y_i}{\sum_i A_i}. \tag{5.1}$$

Der Abstand des Bildschwerpunkts vom Kamerazentrum wird *DISTANCE* genannt und errechnet sich einfach aus:

$$\langle DISTANCE\rangle = \sqrt{\langle x\rangle^2 + \langle y\rangle^2}. \tag{5.2}$$

DISTANCE ist ein Maß für den Abstand zwischen Schauer–Kern und Teleskop.

- Aus den zweiten Momenten gewinnt man Informationen über die Breite des Bildes. Die zweiten Momente sind definiert als:

$$\langle x^2\rangle = \frac{\sum_i A_i \cdot x_i^2}{\sum_i A_i},\ \langle xy\rangle = \frac{\sum_i A_i \cdot x_i y_i}{\sum_i A_i} \text{ und } \langle y^2\rangle = \frac{\sum_i A_i \cdot y_i^2}{\sum_i A_i}. \tag{5.3}$$

Aus den zweiten Momenten folgen die Breiten des Bildes in verschiedene Richtungen:

$$\sigma_{x^2} = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2,\ \sigma_{xy} = \langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle \text{ und } \sigma_{y^2} = \langle y^2\rangle - \langle y\rangle^2. \tag{5.4}$$

Nun kann man die Breite des Bildes entlang der Hauptachen berechnen. Setzt man

$$k = \sigma_{y^2} - \sigma_{x^2},\ l = \sqrt{k^2 + 4\cdot\sigma_{xy}^2},\ u = 1 + \frac{k}{l} \text{ und } v = 2 - u, \tag{5.5}$$

so ergeben sich die beiden wichtigsten Hillas-Parameter:

$$\langle LENGTH\rangle = \frac{1}{2}\left(\sigma_{x^2} + \sigma_{y^2} + l\right) \tag{5.6}$$

$$\langle WIDTH\rangle = \frac{1}{2}\left(\sigma_{x^2} + \sigma_{y^2} - l\right). \tag{5.7}$$

WIDTH ist der rms–Wert der Lichtverteilung entlang der kleinen Halbachse der Ellipse und ein Maß für die laterale Entwicklung des Schauers. Entsprechend ist *LENGTH* der rms–Wert der Lichtverteilung entlang der großen Halbachse und beschreibt die longitudinale Entwicklung des Schauers.

- Im Allgemeinen beschränkt man sich bei der Parametrisierung auf die ersten und zweiten Momente. Durch dritte Momente lassen sich Asymmetrien im Bild beschreiben.

Darüber hinaus haben sich einige weitere Parameter zur Beschreibung von Schauerbildern als sinnvoll erwiesen (siehe Abbildung 5.1):

$$\langle MISS\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}\left[u\langle x\rangle^2 + v\langle y\rangle^2\right] - \frac{2}{l}\sigma_{xy}\langle x\rangle\langle y\rangle} \tag{5.8}$$

$$\sin(\langle\alpha\rangle) = \frac{\langle MISS\rangle}{\langle DISTANCE\rangle} \tag{5.9}$$

$$\langle AZWIDTH\rangle = \sqrt{\frac{\langle x\rangle^2\langle y^2\rangle - 2\langle x\rangle\langle y\rangle\langle xy\rangle + \langle x^2\rangle\langle y^2\rangle}{\langle DISTANCE\rangle^2}} \tag{5.10}$$

$$\tan(\langle\phi\rangle) = \frac{(k+l)\langle y\rangle + 2\cdot\sigma_{xy}\langle x\rangle}{2\cdot\sigma_{xy}\langle y\rangle - (k-l)\langle x\rangle} \tag{5.11}$$

$$\psi = \alpha + \phi \tag{5.12}$$

α beschreibt die Ausrichtung der Hillas–Ellipse in der Kamera: α ist definiert als der Winkel zwischen großer Halbachse und der Verbindungslinie zwischen Bildschwerpunkt und Kamerazentrum. *MISS* ist der senkrechte Abstand zwischen der großen Halbachse und dem Kamerazentrum und beschreibt ebenfalls die Orientierung des Bildes in der Kamera. Eine Verbindung aus Bildgröße und Orientierung ist der Parameter *AZWIDTH*, der als rms–Wert der Lichtverteilung senkrecht zur Linie zwischen Bildschwerpunkt und Kameramitte definiert ist.

Die Parameter α und $AZWIDTH$ werden vor allem in der Analyse von Bildern von Einzelteleskopen eingesetzt.

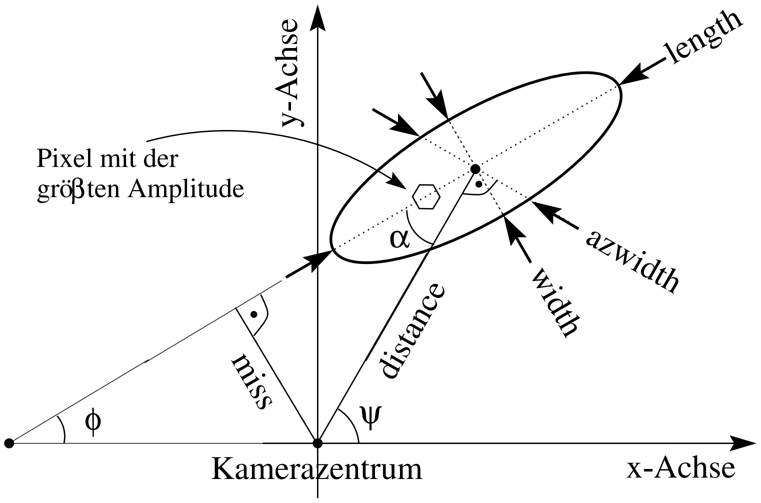


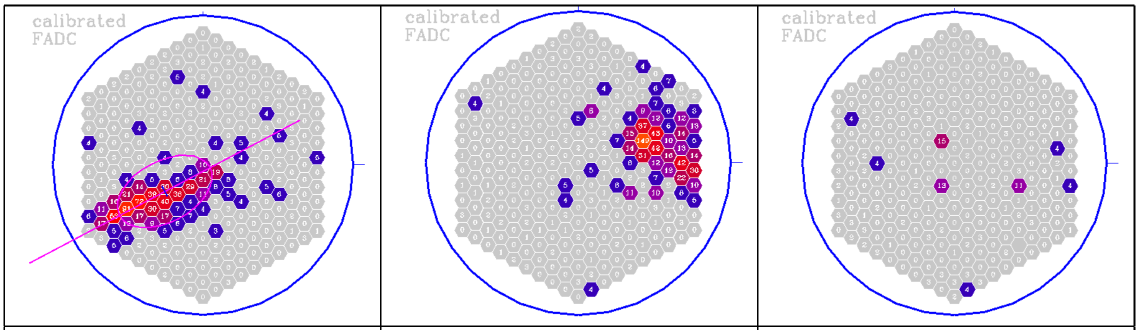
Abbildung 5.1: *geometrische Bedeutung der Hillas–Parameter*

Eine weitere nützliche Größe, die sensitiv auf die Art des Primärteilchens ist, ist der Parameter *CONCENTRATION*, der als Verhältnis des Anteils an Licht in den zwei Pixeln größter Amplitude zu der Gesamthelligkeit definiert ist.

5.2 γ/Hadron–Separation durch Hillas–Parameter

Die Unterschiede in der Schauerentwicklung zwischen γ– und Hadron–Schauern spiegeln sich in Unterschieden in der Verteilung des Čerenkov–Lichts und dadurch in den Hillas-Parametern wider. Die Abbildung 5.2 zeigt typische Bilder, wie sie für verschiedenen Schauer in der Kamera erscheinen.

- Die Werte der Parameter *WIDTH* und *LENGTH* sind wegen kleinerer Transversalimpulse und der kleineren Eindringtiefe in der Atmosphäre für γ–induzierte Schauer kleiner im Vergleich zu Hadron–induzierten Schauern, das Entsprechende gilt für *AZWIDTH*.



γ-Kandidat	Hadron-Kandidat	Nightsky-Hintergrund

Abbildung 5.2: *typische Bilder von Schauern in einer HEGRA–Kamera. (Die Pixeleinträge geben die Amplitude in Photoelektronen an.)*

- Wegen der kleineren Ausdehnung des Schauermaximums ist bei γ–induzierten Schauern der Wert für *CONCENTRATION* größer als bei hadronischen Schauern.
- Bei der Beobachtung von Punktquellen liegt die Schauerachse bei γ–Schauern bei Ausrichtung des Teleskops auf die Quelle parallel zur optischen Achse. Deshalb sind die Schauerbilder auf das Kamerazentrum ausgerichtet. Es ergeben sich also kleinere α– und *MISS*–Werte, während hadronische Schauer wegen der Isotropie der kosmischen Strahlung keine Vorzugsrichtung besitzen. und alle α– bzw. *MISS*–Werte gleich häufig auftreten.
- Aufgrund der für γ–Schauer kleineren Fluktuationen streuen die Parameter weniger stark verglichen mit hadronischen Schauern.

5.2.1 Schnitte auf Hillas-Parameter

Die aktive Galaxie Mkn 501 zeigt aufgrund der stereoskopischen Richtungsrekonstruktion ein signifikantes γ–Signal ohne eine zusätzliche Selektion der Ereignisse nach der Form der Schauerbilder. Um die Sensitivität auf schwächere γ–Quellen zu erhöhen, kann man Schnitte auf die Form der Bilder anwenden, welche die statistische Signifikanz der Messung erhöhen.

Die Signifikanz einer Messung von N_γ γ–Ereignissen aus der Quellregion über einem Untergrund von N_p Ereignissen ist näherungsweise gegeben durch ([LI83]):

$$\sigma = \frac{N_\gamma}{\sqrt{N_p + N_\gamma}} = \frac{N_{\text{on}} - N_{\text{off}}}{\sqrt{N_{\text{on}} + N_{\text{off}}}}. \tag{5.13}$$

Dabei bezeichnet N_{on} die Anzahl der Ereignisse in der Quellregion, N_{off} die Anzahl der Ereignisse in der gleich großen Untergrundregion. Unter der Annahme einer schwachen Quelle ist $N_p \gg N_\gamma$ und man erhält für die Signifikanz:

$$\sigma = \frac{N_\gamma}{\sqrt{N_p}} = \frac{N_{\text{on}} - N_{\text{off}}}{\sqrt{2 \cdot N_{\text{off}}}}. \tag{5.14}$$

Selektiert man Ereignisse aufgrund eines bestimmten Wertes für einen Bildparameter, so spricht man von einem Schnitt auf einen Parameter und definiert die Wahrscheinlichkeiten (Effizienzen) dafür, dass ein γ–Ereignis bzw. ein hadronisches Ereignis die Selektionskriterien erfüllt:

$$\epsilon_\gamma \quad = \quad \frac{N_\gamma^{(\mathrm{cut})}}{N_\gamma} = \frac{N_{\mathrm{on}}^{(\mathrm{cut})} - N_{\mathrm{off}}^{(\mathrm{cut})}}{N_{\mathrm{on}} - N_{\mathrm{off}}} \text{ und} \tag{5.15}$$

$$\epsilon_p \quad = \quad \frac{N_p^{(\mathrm{cut})}}{N_p} = \frac{N_{\mathrm{off}}^{(\mathrm{cut})}}{N_{\mathrm{off}}}. \tag{5.16}$$

Nach Anwendung des Schnittes ist die Signifikanz $\sigma^{(\mathrm{cut})}$ gegeben durch:

$$\sigma^{(\mathrm{cut})} = \frac{\epsilon_\gamma N_\gamma}{\sqrt{\epsilon_p N_p}} = q \cdot \sigma \text{ mit } q = \frac{\epsilon_\gamma}{\sqrt{\epsilon_p}} \tag{5.17}$$

Um die Sensitivität auf schwache γ–Quellen zu erhöhen, kann man Schnitte auf kleine Werte der Hillas–Parameter *WIDTH* und *LENGTH* oder auf große Werte für *CONCENTRATION* ausführen, die hadronische Ereignisse im Datensatz verwerfen und dadurch die Signifikanz der Messung um den Faktor q erhöhen.

Da die Signifikanz einer Messung mit der Messzeit t proportional zu $\sqrt{t}$ ansteigt, entspricht ein Datensatz mit angewendeten Schnitten und der Erhöhung der Signifikanz um q einer Messung mit einer um den Faktor q^2 längeren Messzeit.

5.2.2 Skalierung der Parameter

Die Hillas-Parameter *WIDTH* und *LENGTH* sind korreliert und hängen außer von der Gesamthelligkeit *SIZE* des Bildes noch von der Schauergeometrie (Entfernung zum Schauerauftreffpunkt d) und der Position der Quelle am Himmel (Zenithwinkel θ) ab. Daher werden skalierte Größen eingeführt, bei denen die Bildparameter mit dem aus Monte–Carlo–Simulationen folgenden Erwartungswert für γ-induzierte Schauer normiert werden:

$$ScWidth = \frac{WIDTH}{WIDTH_{MC,\gamma}(SIZE, d, \theta)}. \tag{5.18}$$

Die Verteilungen der skalierten Parameter von γ-Schauern sind um den Wert 1.0 konzentriert, während die skalierten Werte von hadronischen Schauern zu größeren Werten tendieren.

5.2.3 γ/Hadron–Separation bei dem HEGRA–Teleskopsystem

Um zu einer γ–Hadron–Separation für ein System von Teleskopen zu kommen, bildet man den Mittelwert *MScWidth* der skalierten Breiten *ScWidth* über alle N getriggerten Teleskope CT_i, die zusätzlich eine Mindesthelligkeit von 40 Photoelektronen aufweisen:

$$MScWid = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\substack{\mathrm{trigger(CT}_i) = \mathrm{on} \\ \mathrm{SIZE(CT}_i) > 40\mathrm{pe}}} ScWidth(\mathrm{CT}_i). \tag{5.19}$$

Die Verteilung des Parameters *MScWid* ist in Abbildung 5.3 für die Beobachtung des aktiven galaktischen Kerns Mkn 501 dargestellt. Man erkennt einen Überschuß γ–induzierter Ereignisse bei dem Wert 1. Unter der Annahme, dass sich die Verteilung Hadron–induzierter Ereignisse gleich

für Quell– und Untergrundmessung verhält, lasst sich die Signifikanz des γ–Signals und dessen Erhöhung durch Schnitte berechnen.
Die eingezeichneten Schnitte $MScWid < 1.3$ [1] und $MScWid < 1.1$ unterdrücken den hadronischen Untergrund und erhöhen die Signifikanz der Messung:

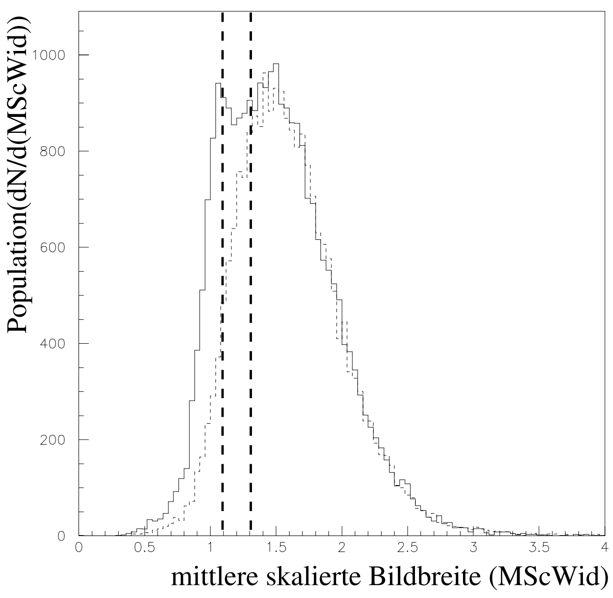
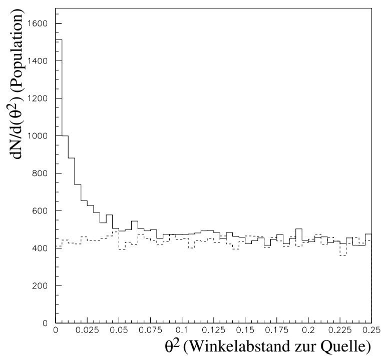


Abbildung 5.3: *Verteilung des Parameters MScWid (durchgezogene Linie: Quellmessung, gestrichelte Linie: Untergrundmessung)*

Die Abbildung 5.4 demonstriert, wie Schnitte auf den Parameter *MScWidth* den hadronischen Untergrund unterdrücken. Es ist die Verteilung des Winkelabstands θ^2 der rekonstruierten Schauerrichtung von der Quellposition bzw. dem Zentrum der OFF–Position dargestellt.

Der Schnitt $MScWidth < 1.1$ erhöht die Signifikanz σ maximal um einen Faktor $q = 2.51$, man verliert aber dabei schon sehr viele Photonen ($\epsilon_\gamma = 0.71$). Der Schnitt $MScWidth < 1.3$ unterdrückt im Vergleich den hadronischen Untergrund nicht so stark ($\epsilon_p = 0.23$, verglichen mit $\epsilon_p = 0.08$), belässt aber einen Großteil der Photonen im Datensatz ($\epsilon_\gamma = 0.95$).

[1] Hillas-Parameter, die die Ausdehnung bzw. Lage des Bildes beschreiben, haben als Einheit $[deg]$, was der Einfachheit halber fallengelassen wird.



kein Schnitt
$N_p = 21930,\ N_\gamma = 4240$
$\sigma = 28.6$

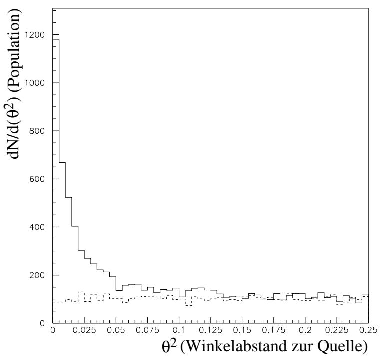
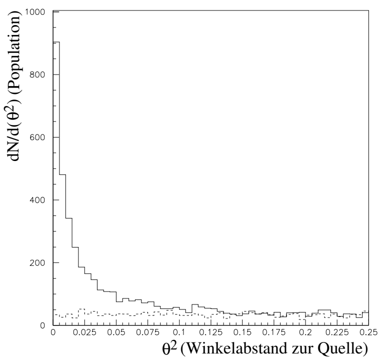
	
$MScWid < 1.3$	$MScWid < 1.1$
$N_p = 5101,\ N_\gamma = 4025$ $\epsilon_p = 0.23,\ \epsilon_\gamma = 0.95$	$N_p = 1728,\ N_\gamma = 3000$ $\epsilon_p = 0.08,\ \epsilon_\gamma = 0.71$
$q = 1.98$	$q = 2.51$

Abbildung 5.4: *Reduktion des hadronischen Untergrunds durch Schnitte auf MScWid*

Kapitel 6

Multifraktale Analyse

6.1 Analyse von multifraktalen Verteilungen

Die Entwicklung eines Schauers in der Atmosphäre kann man als eine Kette selbstähnlicher Prozesse auffassen: In jedem Schritt löst ein Schauerteilchen einen Subschauer aus, dessen Teilchen wiederum Subschauer auslösen usw. Man erwartet deshalb, dass die Verteilung des Čerenkov–Lichts am Boden und die Čerenkov–Bilder, die von der HEGRA–Kamera aufgenommen werden, eine fraktale Struktur aufweisen, die durch geeignete Größen parametrisiert werden kann. Diese fraktalen Parameter kann man benutzen, um die Primärteilchen zu identifizieren. Man kann eine den Hillas–Parametern vergleichbare Rejektion des hadronischen Untergrunds erreichen und so die Sensitivität des HEGRA–Systems auf schwache Quellen erhöhen

6.1.1 Multifraktale Parameter

Selbstähnlichkeit zeigt sich in einer Vielzahl von natürlichen Objekten. Strukturen, die selbstähnliche Eigenschaften aufweisen, werden Fraktale genannt und können durch geeignete Parameter quantitativ beschrieben werden [FED88]. Im Folgenden wird die Beschreibung des Skalenverhaltens selbstähnlicher Strukturen durch fraktale, faktorielle und Wavelet–Parameter besprochen und deren funktionale Abhängigkeit in einem einfachen Beispiel demonstriert.

Skalenverhalten

Auf einem d–dimensionalen Gitter mit Gitterkonstante eins sei auf jedem Punkt $\vec{x}$ eine Verteilung $\Phi(\vec{x})$ definiert, die als normiert angenommen wird. Die Gitterpunkte werden in nichtüberlappende Boxen der Seitenlänge ℓ zusammengefasst. Die Summe der Verteilung über alle Gitterpunkte innerhalb einer Box der linearen Ausdehnung ℓ wird Boxamplitude genannt und mit $p(\vec{x},\ell)$ bezeichnet:

$$p(\vec{x},\ell) = \sum_{\{\vec{x}\prime\}} \Phi(\vec{x}\prime) \quad \text{mit} \tag{6.1}$$

$$\{\vec{x}\} = \{x \leq x\prime \leq x+\ell+1, y \leq y\prime \leq y+\ell+1, \ldots\}, \ell \geq 1. \tag{6.2}$$

Bei fraktalen Verteilungen erwartet man ein Skalenverhalten $\langle p(x,\ell)\rangle \sim \ell^{\alpha}$ für kleine Ausdehnungen ℓ der Boxen, woraus im Prinzip die Lipschitz–Hölder–Exponenten (singularity exponents) α ableitbar sind. Dabei spielt die konkrete Form der Boxen keine Rolle ([KAN95]).

Lipschitz–Hölder–Exponent $\alpha(q)$

Unterschiedliche Werte für α stammen aus unterschiedlichen Regionen der Verteilung, d.h. sie wurden für verschiedene Teilmengen ermittelt. Um die Verteilung vollständig zu beschreiben, benötigt man daher außer den Werten für α auch noch die Zahl der Teilmengen $N(\alpha,\ell)$, die durch einen Exponenten α beschrieben werden. Für die Anzahl der Teilmengen mit einem Wert für α aus dem Intervall $[\alpha\ldots\alpha+d\alpha]$ im Übergang zu kleinen Boxen macht man den Ansatz $N(\alpha,\ell)\sim\ell^{-f(\alpha)}$.

Eine multifraktale Verteilung ist also dadurch definiert, dass man eine unendliche Zahl von α's benötigt, um die Verteilung zu beschreiben. Das komplexe Verhalten der Verteilung zeigt sich in den Momenten $\langle p^q(\vec{x},\ell)\rangle \sim \ell^{q\alpha(q)}$, bei denen α nichtlinear von q abhängt. Daraus folgt für das Skalenverhalten:

$$\langle p^q(\vec{x},\ell)\rangle \neq \langle p(\vec{x},\ell)\rangle^q. \tag{6.3}$$

Im Gegensatz dazu spricht man von regulären Verteilungen, wenn nur ein einzelner Wert für α vorkommt. In diesem Fall erwartet man das übliche Skalenverhalten:

$$\langle p^q(\vec{x},\ell)\rangle \sim \langle p(\vec{x},\ell)\rangle^q. \tag{6.4}$$

Massenexponent $\tau(q)$

Der erste Schritt in der multifraktalen Analyse ist die Berechnung des multifraktalen Moments $Z_q(\ell)$. Aus dessen Skalenverhalten folgt der Massenexponent $\tau(q)$:

$$Z_q(\ell)=\sum_{\{\vec{x}\}}\langle p^q(\vec{x},\ell)\rangle, \sim \ell^{\tau(q)} \tag{6.5}$$

wobei $\{\vec{x}\} = \{x=0,\ell,2\ell\ldots;y=0,\ell,2\ell,\ldots;\ldots\}$. Das Moment $Z_q(\ell)$ ist also auf eine Längenskala ℓ zu einem ganzzahligen Index q definiert. Aus dem Skalenverhalten des multifraktalen Moments $Z_q(\ell)$ folgen die Massenexponenten $\tau(q)$ als Steigung der Geraden durch die Punkte $(log(Z_q(\ell))|log(\ell))$ [1].

Zusammenhang zwischen $f(\alpha)$ und $\tau(q)$

Setzt man in die obige Gleichung den Skalenansatz ein, so erhält man:

$$Z_q(\ell)\sim\sum_{\{\vec{x}\}}\ell^{q\alpha(q)}\sim\sum_{\alpha}\ell^{q\alpha(q)}N(\alpha,\ell)\sim\sum_{\alpha}\ell^{q\alpha(q)}\ell^{-f(\alpha)}. \tag{6.6}$$

Im zweiten Schritt wurde die Summe über die Boxen durch die Summation über die Werte von α ersetzt. Nach einer Transformation der Summe in ein Integral folgen aus den $\tau(q)$ mit Gleichung 6.5 die Werte für $\alpha(q)$ und $f(\alpha)$:

$$\alpha(q) = \frac{\partial}{\partial q}\tau(q), \tag{6.7}$$

$$f(\alpha) = q\cdot\alpha(q)-\tau(q). \tag{6.8}$$

[1] Es existiert eine enge Analogie zwischen dem multifraktalen Formalismus und der Thermodynamik: Wie in der statistischen Mechanik aus den Zustandsummen durch logarithmisches Ableiten die thermodynamischen Potenziale folgen, berechnet man aus den Momenten durch logarithmisches Ableiten die multifraktalen Parameter, zwischen denen dann analog zur Thermodynamik Legendre–Beziehungen herrschen ([OTT94]).

Die Funktion $f(\alpha)$ ist also die Legendre–Transformierte von $\tau(q)$. Für eine reguläre Verteilung ergibt sich, dass τ linear von q abhängt, $\tau(q) = \alpha_0(q-1)$, wobei α_0 gleich der euklidischen Dimension des zugrundeliegenden Gitters ist.

Bei großen Werten von q ist das fraktale Moment $Z_q(\ell)$ durch Zellen mit großen Boxamplituden dominiert, bei Werten von $q \ll 1$ werden die Beiträge von Zellen mit den kleinsten Boxamplituden stark gewichtet und bestimmen den Wert von $Z_q(\ell)$.

Fraktale Dimension $d(q)$

Aus dem Massenexponent $\tau(q)$ lässt sich die fraktale Dimension $d(q)$ ableiten:

$$d(q) = \frac{1}{q-1} \cdot \tau(q) \quad \forall q \neq 1. \tag{6.9}$$

$d(q)$ wird gleich der euklidischen Dimension des zugrunde liegenden Gitters für konstante Verteilungen. Wegen der Singularität dieser Definition für $q = 1$ muss $d(1)$ in einem Grenzübergang berechnet werden ([FED88]).

6.1.2 Faktorielle Analyse

Faktorielle Momente $F_i(\ell)$

Faktorielle Momente werden ähnlich den multifraktalen Momenten ermittelt, nur werden die Boxen mit hohen Einträgen im Vergleich schwächer gewichtet. Faktorielle Momente sind im Gegensatz zu fraktalen Momenten nur für ganzzahlige Amplitudenverteilungen definiert und sind mit dem gleichen Algorithmus wie die multifraktalen Momente mit nur geringen Änderungen berechenbar.

In einer Box der Größe ℓ finde man für die Summe aller Amplituden $A(\vec{x}, \ell)$. Damit berechnet man $P_i(\vec{x}, \ell)$ (siehe [BIA86] und [BIA88]):

$$P_i(\vec{x}, \ell) = A(\vec{x}, \ell) \cdot (A(\vec{x}, \ell) - 1) \cdot \ldots \cdot (A(\vec{x}, \ell) - i + 1), \tag{6.10}$$

Der Ausdruck $\sum_{\{\vec{x}\}} A(\vec{x}, \ell) = N$ entspricht der Gesamtamplitude N. Die Wichtung der Gesamtamplitude innerhalb einer Box folgt also nicht durch Exponenzieren, sondern durch die Berechnung von Fakultäten, die nach einer Interationstiefe i abgebrochen wird, und ist deshalb weniger stark im Vergleich zu den multifraktalen Momenten. Die faktoriellen Momente sind definiert als:

$$F_i(\ell) = \frac{\ell \cdot \sum_{\{\vec{x}\}} \langle P_i(\vec{x}, \ell) \rangle \cdot \ell^{-i}}{N(N-1) \cdot \ldots \cdot (N-i+1)}. \tag{6.11}$$

In der Literatur wird im Allgemeinen i anstatt q zur Bezeichnung der Ordnung des Moments verwendet.

Faktorielle Parameter $\gamma(i)$

Die faktoriellen Parameter, auch Intermittenzen genannt, ergeben sich wieder als Skalenvariable aus der doppeltlogarithmischen Auftragung des Moments gegen die Längenskala:

$$F_i(\ell) \sim \ell^{\gamma_i}. \tag{6.12}$$

Die faktoriellen Momente nehmen den konstanten Wert eins für Poisson–verteilte Amplituden in den Boxen an. In diesem Fall verschwinden die Intermittenzen γ_i identisch ([KEM94]).

6.2 Wavelet–Analyse

Als alternativer Ansatz, selbstähnliche Muster zu beschreiben, sind Wavelets sehr attraktiv. Man kann sich die Wavelet–Analyse als eine Serie von Filterprozessen vorstellen, bei denen Strukturen auf unterschiedlichen Längenskalen unabhängig voneinander untersucht werden. Das zu untersuchende Muster wird dabei durch einen Satz orthogonaler und linear unabhängiger Basisfunktionen beschrieben. Dieser Funktionensatz wird durch diskrete Translationen und Skalierungen aus einem sog. Basis–Wavelet konstruiert.

Die Wavelet–Transformation kann man als diskrete Fouriertransformation auffassen, mit dem Unterschied, dass die Funktionen des Basissystems lokalisiert sind. Ausgehend von dem einfachsten diskreten Wavelet, dem sog. Haar–Wavelet, kann die multifraktale Analysemethode verallgemeinert werden, um das Skalenverhalten von Strukturen zu untersuchen ([KAN95]). Der Wavelet–Ansatz ist komplementär zu der Analyse mittels multifraktaler Momente, vor allem, wenn ein multifraktales Verhalten nicht klar abgeleitet werden kann.

6.2.1 Ein differentieller Ansatz für Multifraktalität

Ziel der Wavelet–Analyse ist es, das Skalenverhalten von Differenzen zwischen benachbarten Box–Wahrscheinlichkeiten zu untersuchen. Der Einfachheit halber beschränke ich mich auf eine eindimensionale Verteilung. Dazu wird das Wavelet-Moment $W_q(\ell)$ definiert, das an Stelle des multifraktalen Moments $Z_q(\ell)$ tritt:

$$W_q(\ell) = \sum_{\{x\}} \langle |p(x,\ell) - p(x+\ell,\ell)|^q \rangle \sim \ell^{\beta(q)}, \tag{6.13}$$

wobei $\{x\} = \{0, 2\ell, 4\ell, \ldots\}$. Die Exponenten $\beta(q)$ entsprechen den Koeffizienten $\tau(q)$ der multifraktalen Analyse. In der Wavelet–Analyse beschränkt man sich im Allgemeinen auf $q \geq 0$, negative Werte für q führen zu Komplikationen, die in [MUZ93] dargestellt werden.

Für den Fall einer multifraktalen Verteilung erwartet man, dass die Differenzen $|p(x,\ell)-p(x+\ell,\ell)|$ ebenfalls multifraktale Eigenschaften aufweisen und die Exponenten $\beta(q)$ nichtlinear vom Index q abhängen.

Eine Relation zwischen den $\beta(q)$ und den $\tau(q)$ lässt sich unter allgemeinen Annahmen für kontinuierliche Wavelet-Transformationen herleiten ([BAC93]). Im Folgenden wird anhand eines einfachen Beispiels der Zusammenhang zwischen $\beta(q)$ und $\tau(q)$ erläutert:

Allgemein erwartet man, dass die Boxamplituden $p(x,\ell)$ im Mittel wie ℓ^α skalieren. Abweichungen von dem Verhalten werden durch eine Funktion $c(x)$ korrigiert:

$$\langle p(x,\ell) \rangle \sim \ell^\alpha \langle c(x) \rangle \tag{6.14}$$

Für die Differenzen der Wahrscheinlichkeit in benachbarten Boxen ergibt sich dann:

$$\langle |p(x,\ell) - p(x+\ell,\ell)| \rangle \sim \ell^\alpha \langle |c(x) - c(x+\ell)| \rangle. \tag{6.15}$$

Wenn man für die Korrekturfunktion $c(x)$ ein entsprechendes Skalenverhalten $\langle |c(x) - c(x+\ell)| \rangle \sim \ell^H$ annimmt, das durch eine reelle Konstante H beschrieben wird, so erhält man:

$$\langle |p(x,\ell) - p(x+\ell,\ell)| \rangle \sim \ell^{\alpha+H}. \tag{6.16}$$

Die Funktion $c(x)$ wird als regulär angenommen. Zur Beschreibung ihres Skalenverhaltens genügt ein einziger Exponent ($\alpha = H$), im Gegensatz zu einer fraktalen Verteilung, zu deren Beschreibung die Kenntnis aller $\alpha(q)$ notwendig ist. Damit vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$\langle |p(x,\ell) - p(x+\ell,\ell)|^q \rangle = \langle |p(x,\ell) - p(x+\ell,\ell)| \rangle^q. \tag{6.17}$$

Das Skalenverhalten des Wavelet–Moments $W_q(\ell)$ lässt sich nun mit dem des multifraktalen Moments $Z_q(\ell)$ in Verbindung bringen: $Z_q(\ell)$

$$W_q(\ell) \sim \sum_{\{x\}} \ell^{q\alpha} \ell^{qH} \sim \ell^{qH} \cdot Z_q(\ell). \tag{6.18}$$

Zwischen den Wavelet–Exponent $\beta(q)$ und dem Massenexponent $\tau(q)$ der multifraktalen Analyse besteht deshalb die Beziehung:

$$\beta(q) = \tau(q) + H \cdot q. \tag{6.19}$$

Der Wavelet–Exponent β unterscheidet sich von dem Massenexponent τ durch einen Term $H \cdot q$, der das Fehlen von multifraktalem Verhalten anzeigt.

6.2.2 Wavelet–Analyse von Fluktuationen

Die Berechnung der Box–Wahrscheinlichkeiten kann man auch als Faltung der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\Phi(x)$ mit einer geeigneten Funktion $b(x\prime - x, \ell)$ auffassen (vgl. Abbildung 6.1).

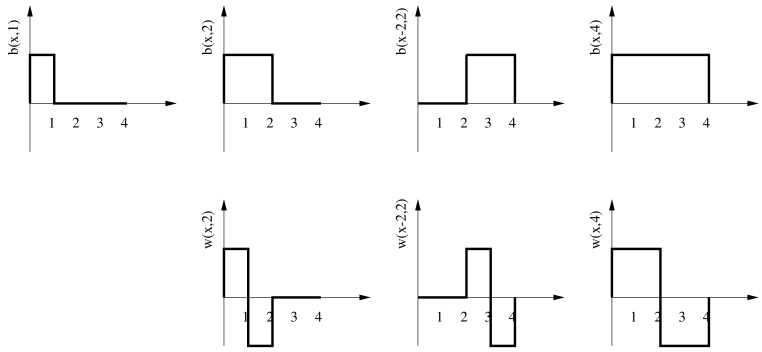


Abbildung 6.1: *Boxfunktionen $b(x,\ell)$ (obere Reihe) für $\ell = 1, 2$ und 4, und Haar-Wavelets $w(x,\ell)$ (untere Reihe) für $2\ell = 2$ und 4*

Die Boxfunktionenen $b(x\prime - x, \ell) = 1 \; \forall x \in [0 \ldots \ell]$ und verschwinden außerhalb dieses Intervalls. Damit erhält man für die Boxamplitude $p(x,\ell)$:

$$p(x,\ell) = \int dx\prime \Phi(x\prime) \cdot b(x\prime - x, \ell). \tag{6.20}$$

Betrachtet man nun die Differenz der Boxamplitude zwischen zwei benachbarten Boxen, so entspricht dies einer Faltung der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\Phi(x)$ mit dem Basisfunktionensystem der Wavelets $w(x, 2\ell)$.

$$p(x,\ell) - p(x+\ell,\ell) = \int dx' \Phi(x') \cdot w(x'-x, 2\ell). \tag{6.21}$$

Diese Differenzen der Wahrscheinlichkeiten zwischen zwei benachbarten Boxen der Länge ℓ sind gerade die Koeffizienten der Entwicklung in Haar–Wavelets:

$$\Phi(x) = \sum_{\ell \geq 1} \sum_{\{x'\}} \frac{1}{2\ell} \left[p(x',\ell) - p(x'+\ell,\ell)\right] \cdot w(x-x', 2\ell), \tag{6.22}$$

wobei $\{x'\} = \{0, 2\ell, 4\ell \ldots\}$. Wie man sieht, sind die Wavelets $w(x, 2\ell)$ auf verschiedenen Längenskalen zueinander orthogonal, im Gegensatz zu den Basisfunktionen $b(x,\ell)$, die nur innerhalb einer Längenskala zueinander orthogonal sind.

Aufgrund dieser Eigenschaft der Wavelet–Basis werden Wavelets aller Längenskalen benötigt, um die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\Phi(x)$ darzustellen, während die Verteilung Φ allein durch die Basis der $b(x, \ell = 1)$ auf der kleinsten Längenskala $\ell = 1$ schon vollständig beschrieben ist:

$$\Phi(x) = \sum_{\{x'\}} p(x', 1) b(x-x', 1). \tag{6.23}$$

Zusammenfassend liefert die differentielle Zustandssumme $W_q(\ell)$ der Wavelets eine alternative Beschreibung des Skalenverhaltens von Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\Phi(x)$ und zusätzliche Informationen, verglichen mit den multifraktalen Momenten $Z_q(\ell)$.

Wavelets in zwei Dimensionen

Für zweidimensionale Amplitudenverteilungen werden drei Basiswavelets benötigt, wobei sich die Wavelets entlang der x-Achse, y-Achse und entlang der Diagonalen ausbreiten:

$$W_q^{(x)}(\ell) = \sum_{\{x\}} \sum_{\{y\}} \langle |p(x,y;\ell) + p(x+\ell,y;\ell) - p(x,y+\ell;\ell) - p(x+\ell,y+\ell;\ell)|^q \rangle \tag{6.24}$$

$$W_q^{(y)}(\ell) = \sum_{\{x\}} \sum_{\{y\}} \langle |p(x,y;\ell) - p(x+\ell,y;\ell) + p(x,y+\ell;\ell) - p(x+\ell,y+\ell;\ell)|^q \rangle \tag{6.25}$$

$$W_q^{(d)}(\ell) = \sum_{\{x\}} \sum_{\{y\}} \langle |p(x,y;\ell) - p(x+\ell,y;\ell) - p(x,y+\ell;\ell) + p(x+\ell,y+\ell;\ell)|^q \rangle \tag{6.26}$$

Den Vorzeichenwechsel der Basiswavelets von Pixelgruppe zu Pixelgruppe entlang der drei Richtungen veranschaulicht die Abbildung (6.2).

−	−
+	+

+	−
+	−

−	+
+	−

Abbildung 6.2: *Vorzeichen der Basiswavelets (in x–, y– und d–Richtung)*

Aus dem Skalenverhalten der drei Momente $W_q^{(i)}(\ell)$ folgt jeweils ein Exponent $\beta_q^{(i)}$. Für isotrope Verteilungen sind die Exponenten $\beta_q^{(i)}$ entlang jeder Richtung gleich.

6.3 Beispiel: exaktes Multifraktal

6.3.1 Der multiplikative binomiale Prozess

Zur Illustration wird das Skalenverhalten und seine Beschreibung mit multifraktalen Parametern am Beispiel eines exakten Multifraktals vorgestellt. Auf einem eindimensionalen Gitter der Länge $L = 2^n$ mit $n > 1$ wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\Phi(x)$ entsprechend dem multiplikativen binomialen Prozess iterativ erzeugt:

- Im ersten Schritt wird gesetzt:

$$\Phi(x) = 1,\ 0 \leq x < \ell \text{ und } \Phi(x) = R,\ \ell \leq x < 2\ell = L \tag{6.27}$$

- In einem zweiten Schritt wird jedes der zwei Intervalle der Länge $L/2$ in zwei Teile aufgeteilt. $\Phi(x)$ wird sein ursprünglicher Wert in der ersten Hälfte zugeordnet, und wird im zweiten Teilintervall mit dem Faktor $R \leq 1$ multipliziert.

- Das Aufteilen der Intervalle in zwei Hälften und das entsprechende Wichten mit dem Faktor R des zweiten Teilintervalls wird wiederholt. Auf diese Weise erhält man vier Intervalle der Länge $\ell = L/4$, in denen $\Phi(x)$ die Werte

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= 1,\ 0 \leq x < \ell && (6.28)\\ \Phi(x) &= R,\ \ell \leq x < 2\ell && (6.29)\\ \Phi(x) &= R,\ 2\ell \leq x < 3\ell && (6.30)\\ \Phi(x) &= R^2,\ 3\ell \leq x < 4\ell = L && (6.31) \end{aligned}$$

  annimmt. Dieser Schritt wird iteriert, bis die Länge des Intervalls auf $\ell = 1$ gesunken ist. Der Wert R^k kommt dann bei n–facher Iteration genau $\binom{n}{k}$–mal vor.

- Die Verteilung $\Phi(x)$ wird auf eins normiert.

Durch die Konstruktionsvorschrift gilt für die Boxamplituden, dass $p(x+\ell,\ell) = R\cdot(x,\ell)$ für $\{x\} = \{0, 2\ell, 4\ell, \ldots, L-2\ell\}$. Damit folgt für das multifraktale Moment:

$$Z_q(\ell) = \sum_{\{x\}} [p^q(x,\ell) + p^q(x,x+\ell)] = (1+R^q)\cdot \sum_{\{x\}} p^q(x,\ell). \tag{6.32}$$

Mit $p(x,2\ell) = p(x,\ell) + p(x+\ell,\ell) = (1+R)p(x,\ell)$ folgt daraus:

$$Z_q(\ell) = \frac{1+R^q}{(1+R)^q} \sum_{\{x\}} p^q(x,2\ell) = \frac{1+R^q}{(1+R)^q} \cdot Z_q(2\ell). \tag{6.33}$$

Die Gleichung kann iterativ gelöst werden:

$$Z_q(\ell) = \ell^{\tau(q)} \cdot Z_q(1) \quad \Rightarrow \quad \tau(q) = \frac{1}{\log 2} \log \left[\frac{(1+R)^q}{1+R^q}\right]. \tag{6.34}$$

Aus der Gleichung kann man erkennen, dass für Werte von $R < 1$ $\tau(q)$ nichtlinear von q abhängt und die Verteilung dann multifraktale Eigenschaften aufweist. Im Fall von $R = 1$ wird $\Phi(x)$ konstant; für $\tau(q)$ folgt dann $\tau(q) = q - 1$ und damit für die fraktale Dimension $d = \frac{\tau(q)}{q-1} \equiv 1$.

Auf die gleiche Weise kann man das Wavelet-Moment $W_q(\ell)$ auswerten und erhält mit der Identität $p(x,\ell) - p(x+\ell,\ell) = (1-R) \cdot p(x,\ell)$:

$$W_q(\ell) = \sum_{\{x\}} |p(x,\ell) - p(x+\ell,\ell)|^q = (1-R)^q \cdot \sum_{\{x\}} p^q(x,\ell). \tag{6.35}$$

Jetzt kann man die Wavelet–Momente mit den multifraktalen Momenten in Verbindung setzen:

$$W_q(\ell) = \frac{(1-R)^q}{(1+R)^q} \cdot \sum_{\{x\}} p^q(x,2\ell) = \frac{(1-R)^q}{(1+R)^q} \cdot Z_q(2\ell) = \frac{(1-R)^q}{1+R^q} Z_q(\ell). \tag{6.36}$$

Diese Gleichung lässt sich analog zu dem Fall der multifraktalen Momente lösen. Damit folgt für ein Multifraktal das Ergebnis $\beta(q) = \tau(q)$, da in der doppeltlogarithmischen Auftragung der Momente gegen die Längenskala die beiden Geraden die gleiche Steigung haben und sich nur um einen y–Achsenabschnitt unterscheiden.

6.3.2 Verallgemeinerung auf zwei Dimensionen

Der binomiale multiplikative Prozess

Die Vorschrift, ein exaktes Multifraktal in zwei Dimensionen zu konstruieren ist in der Zeichnung 6.3 dargestellt. R ist wieder der Wichtungsfaktor.

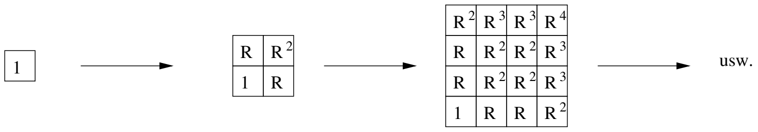


Abbildung 6.3: *Erzeugung von multifraktalen Verteilungen auf einem zweidimensionalen Gitter*

Skalenverhalten der multifraktalen Momente

Entsprechend dem eindimensionalen Fall folgt daraus für die Boxamplitude:

$$\begin{aligned} p(x,y;2\ell) &= p(x,y;\ell) + p(x+\ell,y;\ell) + p(x,y+\ell;\ell) + p(x+\ell,y+\ell;\ell) && (6.37) \\ &= (1+R+R+R^2) \cdot p(x,y;\ell). && (6.38) \end{aligned}$$

Daraus folgt für $Z_q(\ell)$ eine Rekursionsrelation, aus deren Lösung sich der Skalenexponent $\tau(q)$ ergibt, der Massenexponent ist um einen Faktor 2 größer als in dem eindimensionalen Beispiel:

$$Z_q(\ell) = \frac{(1+R^q)^2}{(1+R)^{2q}} \cdot Z_q(2\ell) \Rightarrow \tau(q) = \frac{2}{\log(2)} \log\left[\frac{(1+R)^q}{1+R^q}\right] \tag{6.39}$$

Zur Veranschaulichung wurde mit dem multiplikativen binomialen Prozess auf einem Gitter mit 128×128 Punkten eine multifraktale Verteilung erzeugt (Abbildung 6.4).
Die Momente $Z_q(\ell)$ wurden aus den Amplituden für quadratische Boxen mit der Seitenlänge $\ell = 2^\nu$ mit $\nu = 0 \ldots 6$ berechnet. Man erkennt, dass bei doppeltlogarithmischer Auftragung der Momente $Z_q(\ell)$ gegen die Längenskala $log(\nu)$ eine lineare Beziehung herrscht, was das Skalenverhalten $Z_q(\ell) \sim \ell^{\tau_q}$ bestätigt.

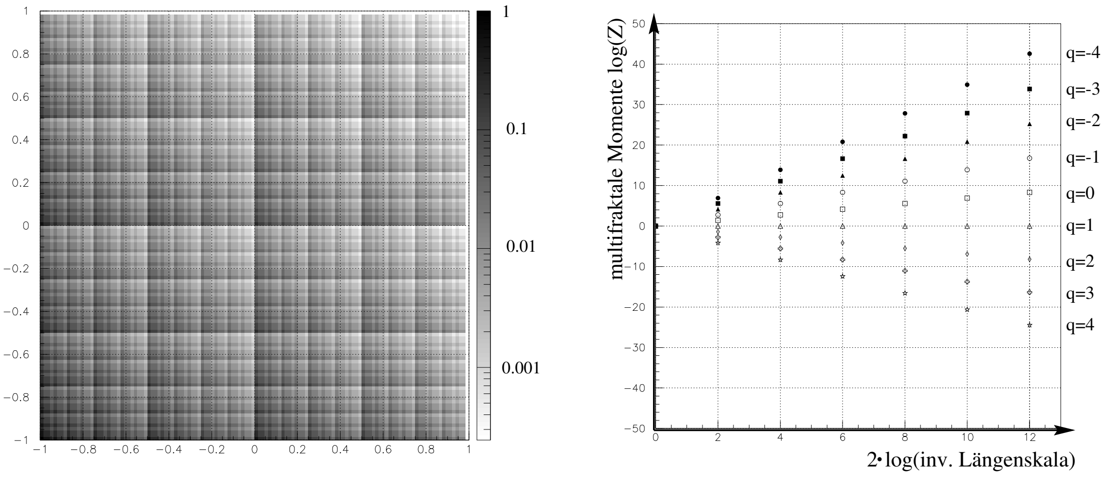


Abbildung 6.4: *Multifraktale Verteilung (links) für $R = 0.577404$, es ist die Amplitude der Verteilung an der jeweiligen Koordinate als Grauwert auf einer logarithmischen Skala aufgetragen und die daraus folgenden multifraktalen Momente $Z_q(\ell)$, $-4 \leq q \leq 4$.*

Multifraktale Parameter $\tau(q)$, $\alpha(q)$ und $f(\alpha)$

Aus der doppeltlogarithmischen Auftragung des Moments $Z_q(\ell)$ gegen die Längenskala ℓ folgt der Massenexponent $\tau(q)$ (Abbildung 6.4) und daraus die übrigen multifraktalen Parameter entsprechend den Formeln 6.5, 6.7 und 6.8. Die typische funktionale Abhängigkeit der multifraktalen Parameter von q bzw. von α zeigt die Abbildung 6.5.

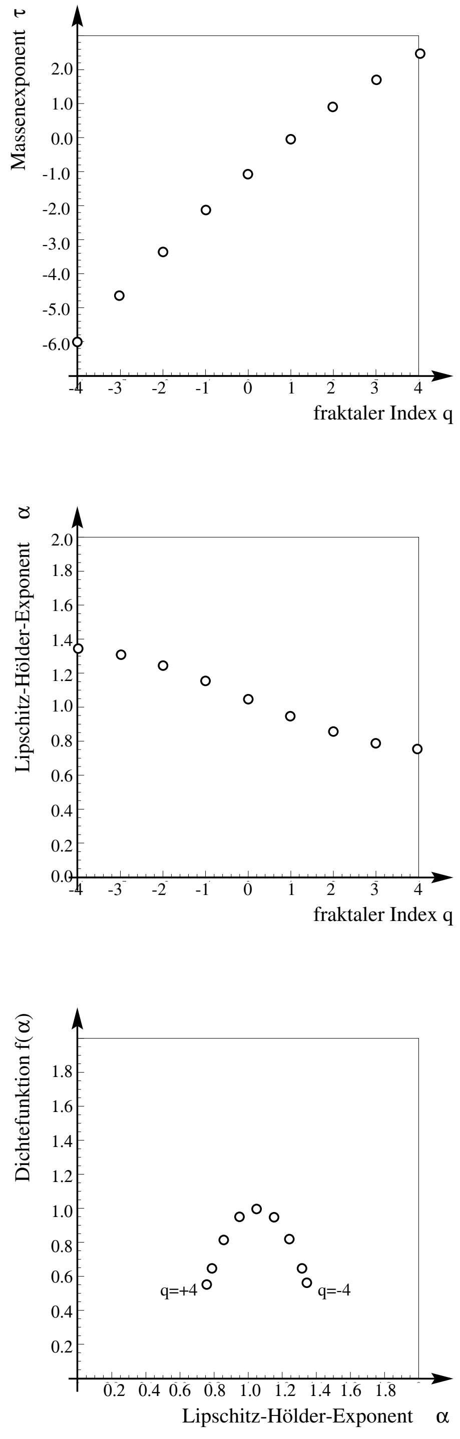


Abbildung 6.5: *Verlauf der multifraktalen Parameter mit dem Index q*

Kapitel 7

Berechnung der Parameter für Čerenkov–Bilder

In dieser Arbeit wird die Strategie verfolgt, die multifraktale Analysemethode auf Ereignisse in dem Datensatz einer bekannten TeV–γ–Quelle anzuwenden. Aus den unterschiedlichen Verteilungen der multifraktalen Parameter aus der Quell– und Untergrundsmessung können die Verteilungen der Parameter für γ– und Hadron–induzierte Schauerbilder charakterisiert und daraus Effizienzen und q–Faktoren für Schnitte auf die Parameter bestimmt werden, was einen Vergleich ihrer Leistungsfähigkeit mit den bekannten Hillas–Parametern zulässt.

7.1 Berechnung von multifraktalen Parametern

7.1.1 Anwendung der Analysemethode auf Čerenkov–Bilder

Datensatz

Die Analysemethode wurde auf einen Datensatz der Aktiven Galaxie Mkn 501 angewendet. Der aktive Kern von Mkn 501 ist in einer elliptischen Muttergalaxie ($\alpha = 16.88$h, $\delta = 39.75°$, im Sternbild Herkules) eingebettet ([STI93]), die sich bei einer Rotverschiebung von $z = 0.033$ befindet, was einer Entfernung von 200 MPc entspricht (mit der Hubble–Konstanten $H = 50$ km/s/Mpc). Mkn 501 gehört zur Klasse der *BL–Lac–Objekte* und befand sich im Jahr 1997 in einem Zustand hoher Aktivität: Der TeV–γ–Fluss überstieg den Fluss des Krebsnebels um einen Faktor von bis zu 10 und zeigte zeitliche Variablität auf einer Skala von wenigen Stunden.

Mkn 501 wurde von einem System von vier Čerenkov-Teleskopen (CT_3, CT_4, CT_5 und CT_6) beobachtet. Diejenigen Messintervalle, die einen hohen γ–Fluss aufweisen und unter günstigen Zenithwinkeln ($10° \leq \theta \leq 26°$) aufgezeichnet wurden, wurden selektiert. Die gesamte Messzeit entspricht 35 Messintervallen mit einer Dauer von je 20 Minuten.

Ereignis–Selektion

Die multifraktalen Parameter wurden für Bilder berechnet, bei denen der Kameratrigger ausgelöst wurde und die zusätzlich eine Mindesthelligkeit von 40 Photoelektronen aufweisen. Damit ist sichergestellt, dass das Bild sinnvolle Informationen enthält.

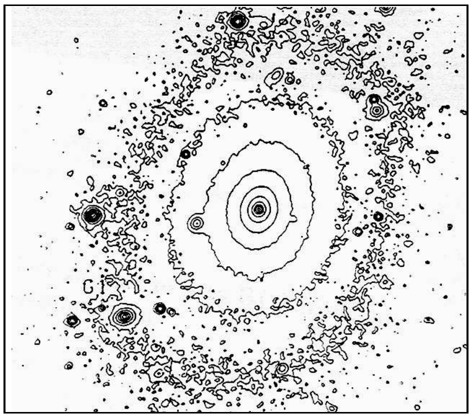


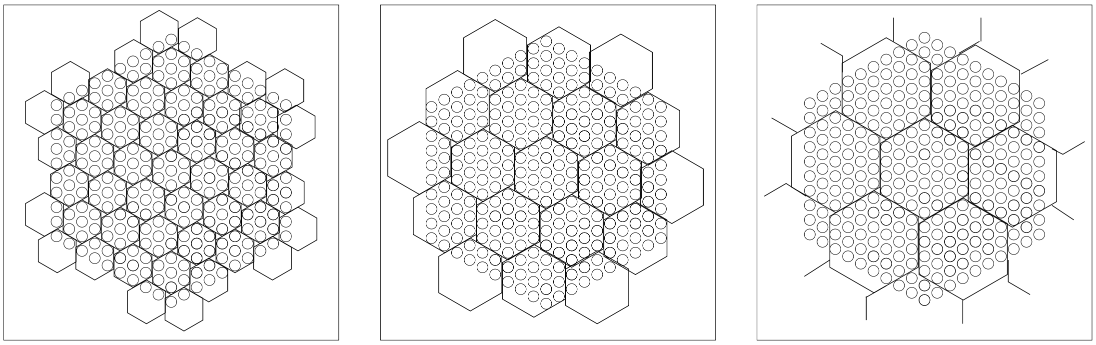
Abbildung 7.1: *Die elliptische Galaxie Mkn 501 im Optischen. Der Bildausschnitt ist zirka 2 min × 2 min groß. Dargestellt sind die Linien gleicher Helligkeit.*

Pixelgruppen

Die kleinste untersuchbare Längenskala ist ein einzelnes Pixel, das einen Winkelbereich von 0.25° überblickt; auf der anderen Seite erstrecken sich Schauerbilder selten über mehr als 2°. Deshalb erwartet man ein Skalenverhalten der multifraktalen Momente auf Längenskalen, die zwischen diesen beiden Werten liegen.

Die Pixelgruppen, die der Analyse zugrunde liegen, haben eine hexagonale Form und bestehen aus 1, 7, 19 und 34 Pixeln (siehe Abbildung 7.2). Die Form der Pixelgruppen wurde so gewählt, dass sie dieselbe hexagonale Symmetrie wie die Kamera aufweisen; eine Abhängigkeit der fraktalen Parameter von der Ausrichtung des Schauerbildes in der Kamera wird deshalb nicht erwartet.

Als Größe der Pixelgruppen wird in der Analyse die Anzahl der Pixel entlang einer Seite des Sechsecks genommen: Die Variable ℓ nimmt also die Werte $\ell = 1$, 2, 3 und 4 an.



7 Pixel ($\ell = 2$) 19 Pixel ($\ell = 3$) 34 Pixel ($\ell = 4$)

Abbildung 7.2: *Definition der Pixelgruppen*

In der Skizze 7.2 kann man die Lage der Pixelgruppen in der Kamera erkennen. Die Kamera wurde in dem Analyseprogramm um fünf weitere Pixelringe erweitert, so dass es möglich wurde, die eigentliche Kamera vollständig mit Pixelgruppen zu überdecken. Die Amplitude der außerhalb der Kamera liegenden virtuellen Pixel wurden auf den Wert Null gesetzt.

In dem Analyseprogramm werden die Nummern derjenigen Pixel, die zu einer Gruppe auf einer gegebenen Längenskala gehören, in einer verketteten Liste gespeichert. Die Zuordnung der Pixel auf die Pixelgruppen erfolgt geometrisch durch die Berechnung des Abstands eines Pixels zum Zentrum der Pixelgruppen. Auf diese Weise ist es einfach, Änderungen in der Größe der Pixelgruppen vorzunehmen und auch veränderte Geometrien für die Pixelgruppen zu implementieren.

Berechnung der Momente

- Bei der Berechnung der Momente $Z_q(\ell)$ werden die normierten Amplituden innerhalb einer Pixelgruppe aufaddiert, mit dem multifraktalen Index q potenziert und anschließend die Summation über alle Pixelgruppen gebildet.
- Zur Berechnung der Wavelet–Momente $W_q^{(i)}(\ell)$ wird vor dem Potenzieren entsprechend der Definition der Betrag der Amplitudendifferenz zu den Nachbargruppen auf der jeweiligen Längenskala gebildet. Die Wavelet-Momente und die aus ihnen abgeleiteten Parameter $\beta_q^{(i)}$ werden für die drei Richtungen der Basiswavelets berechnet.
- Da die faktoriellen Momente $F_i(\ell)$ nur für ganzzahlige Amplitudenverteilungen definiert sind, werden nichtganzzahlige Pixeleinträge gerundet. Die Normierung des Moments erfolgt nach der Summation über die Pixeleinträge mit der Gesamtamplitude, die aus den gerundeten Pixeleinträgen bestimmt wird. Bei der Berechnung der Fakultäten wird die Rekursion $n! = n \cdot (n-1)!$ bei $n = 1$ abgebrochen, mit der üblichen Festsetzung $0! = 1$

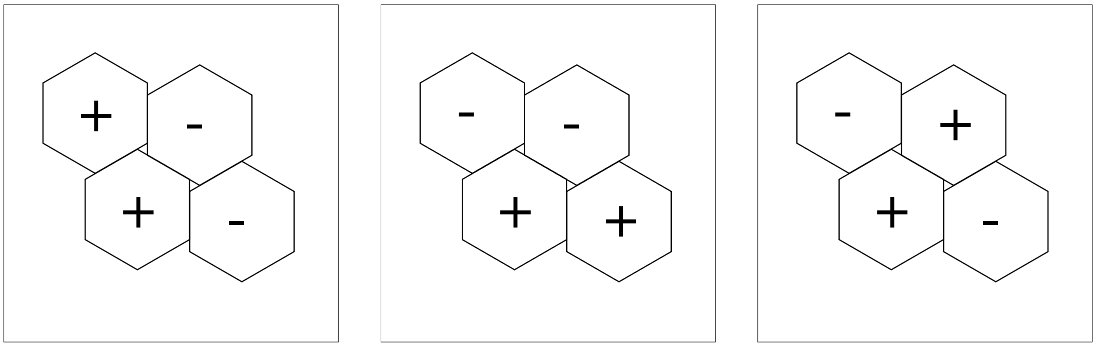
Durch die Wahl des Werteberechs von q bzw. i wird sichergestellt, dass das Signal mit wachsendem q immer stärker gewichtet wird. Prozeduren wie *topologische Tailcuts*, die das Bild vom Rauschen säubern, sind bei der Berechnung multifraktaler Parameter nicht notwendig. Fehlerhafte Pixel werden ausgeschlossen und deren Amplitude auf Null gesetzt.

Basiswavelets

Bei zweidimensionalen Verteilungen auf einem kubischen Gitter werden drei Basiswavelets benötigt, die einer Propagation des Wavelets in horizontaler, vertikaler und diagonaler Richtung entsprechen. Bei einem hexagonalen Gitter wurden die drei Basisrichtungen entlang der Symmetrieachsen gewählt (siehe Abbildung 7.3).
Da man eine Wavelet–Transformation als eine spezielle Fouriertransformation auffassen kann, stellt sich die Frage nach den Randbedingungen. Die bei Fouriertransformationen üblich gewählten zyklischen Randbedingungen sind auch bei Wavelet–Transformationen möglich, wegen der Lokalisierung der Bilder aber nicht nötig.

Die verkettete Liste, in der die Nummern der Pixel innerhalb einer Gruppe gespeichert werden, enthält Verweise auf die Nachbarn der Gruppe in der jeweiligen Richtung. Damit können die Wavelet–Momente einfach berechnet werden.

Für Pixelgruppen, deren Nachbargruppe außerhalb der Kamera liegt, zeigt dieser Verweis auf eine Pixelgruppe, deren Amplituden auf Null gesetzt wurden.



x–Richtung y–Richtung d–Richtung

Abbildung 7.3: *Definition der Basiswavelets*

Wertebereich des Index q

Mit dem fraktalen Index q kann man Bereiche des Bildes bei der Berechnung der Momente je nach ihrer Helligkeit unterschiedlich wichten.

- Negative Werte für q würden Pixelgruppen mit kleinen Einträgen, die vom Rauschen dominiert sind, stärker wichten als das eigentliche Bild.
- Für $q = 0$ wird das Moment immer gleich zur Anzahl der Pixelgruppen in der Unterteilung, da $x^0 \equiv 1 \; \forall$ reellen x, mit der Festsetzung $0^0 = 1$.
- Bei $q = 1$ verschwinden die Parameter identisch, was nur die korrekte Normierung der Amplitudenverteilung widerspiegelt.

Sinnvolle Werte für q bei der Anwendung der multifraktalen Analyse auf Čerenkov-Bilder sind Werte $q \geq 2$. In der vorliegenden Arbeit wurden die Momente für $2 \leq q \leq 8$ bzw. für $2 \leq i \leq 5$ berechnet.

Durch größe Werte für q (bzw. i) konzentriert man sich bei der Berechnung der Momente auf die hellsten Strukturen des Bildes. Weniger ausgeprägte Strukturen tragen kleine Amplitudenwerte und werden durch das Potenzieren mit q (bzw. die Bildung der Fakultät bis zur Iterationstiefe i) unterdrückt.

Berechnung der Massenexponenten $\tau(q)$

Die Massenexponenten $\tau(q)$ ergeben bei der doppeltlogarithmischen Auftragung der Momente über der Längenskala als Steigung der Geraden durch die Punkte. In dem Analyseprogramm werden die Werte von $\tau(q)$ durch einen linearen *least–squares*–Fit an die vier Punkte $(\log(Z_q(\ell)| \log(\ell))$ gewonnen. Die Steigung der Fitgeraden ist der Massenexponent $\tau(q)$.[1]

[1] In der Literatur wird bei der Berechnung der $\tau(q)$ oft die Formel $\tau(q) = -\frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{d}{d\nu} \ln Z_q(M)$ verwendet, in der das Skalenverhalten des Moments $Z_q(M)$ auf die Anzahl M der Boxen in der Unterteilung bezogen wird. Bei einfachen kubischen Geometrien ist es sinnvoll, $M \sim 2^\nu$ zu wählen. Aus $\ell \sim M^{-1} \sim 2^{-\nu}$ folgt der Korrekturfaktor -$\frac{1}{\ln 2}$ durch die Anwendung der Kettenregel in der Ableitung.

Ganz analog ergeben sich aus den faktoriellen Momenten $F_i(\ell)$ die Intermittenzen γ_i und aus den Wavelet–Momenten $W_q^{(i)}(\ell)$ die Wavelet–Parameter $\beta_q^{(i)}$ für jede der drei Richtungen i.

Berechnung des Parameters $\alpha(q)$

Der Singularitätsexponent $\alpha(q)$ ist als Ableitung von $\tau(q)$ nach dem Index q definiert. In dem Analyseprogramm wird $\alpha(q)$ durch den Mittelwert der Differenzenquotienten von $\tau(q)$ zum Wert von τ für $q+1$ und $q-1$ berechnet:

$$\alpha(q) = \frac{1}{2}\left[\tau(q+1) - \tau(q-1)\right]. \tag{7.1}$$

Die Werte $\alpha(q_{\text{min}})$ und $\alpha(q_{\text{max}})$ ergeben sich aus den „einseitigen" Differenzenquotienten:

$$\alpha(q = q_{\text{min}} = 2) = \tau(q=3) - \tau(q=2) \text{ und} \tag{7.2}$$
$$\alpha(q = q_{\text{max}} = 8) = \tau(q=8) - \tau(q=7). \tag{7.3}$$

Berechnung der Parameter $d(q)$ und $f(\alpha)$

Die Berechnung der Parameter $d(q)$ und $f(\alpha)$ folgen aus den Formeln 6.9 bzw. 6.8. Dabei wird zunächst der Parameter f_q mit q indiziert und bei der Auswertung die Wertepaare $(f_q|\alpha_q)$ gebildet und über α aufgetragen, was dann dem Verlauf der Funktion $f(\alpha)$ entspricht.

Auf die gleiche Weise, wie aus dem Massenexponent τ die multifraktalen Parameter α und $f(\alpha)$ folgen, lassen sich prinzipiell auch aus dem faktoriellen Parameter γ und dem Wavelet–Parameter β analoge Größen bilden. Diese liefern allerdings keine neuen Informationen, weshalb auf deren Berechnung verzichtet wurde.

7.1.2 Spektrum der multifraktalen Parameter

In den Histogrammen ist jeweils die Verteilung der γ–Ereignisse und der hadronischen Ereignisse dargestellt. Die γ–Verteilung wurde als Differenz der Histogramme aus der ON– und OFF–Region erzeugt, mit korrekter Propagation des statistischen Fehlers in jedem Intervall.

Die Spektren folgen einer Normalverteilung und lassen sich gut durch Angabe des Mittelwertes und der Standardabweichung einer angepassten Gauß–Funktion beschreiben. Dabei wurde nicht zwischen Ereignissen unterschieden, die in einer unterschiedlichen Zahl von Teleskopen registriert wurden.

Für die Parameter, die das Skalenverhalten der multifraktalen, faktoriellen oder Wavelet–Momente beschreiben, gilt allgemein, dass im Mittel der Parameter, der aus dem Bild eines hadronischen Schauers abgeleitet wurde größer ist als im Falle eines γ–induzierten Schauers: $\langle\tau_q^\gamma\rangle < \langle\tau_q^{\text{Hadron}}\rangle$, $\langle\alpha_q^\gamma\rangle < \langle\alpha_q^{\text{Hadron}}\rangle$, $\langle\beta_q^\gamma\rangle < \langle\beta_q^{\text{Hadron}}\rangle$ und $\langle\gamma_i^\gamma\rangle < \langle\gamma_i^{\text{Hadron}}\rangle$.

Verteilung des Massenexponenten τ

Abbildung 7.4 zeigt die Verteilung des Massenexponenten τ für γ– und Hadron–induzierte Schauer.

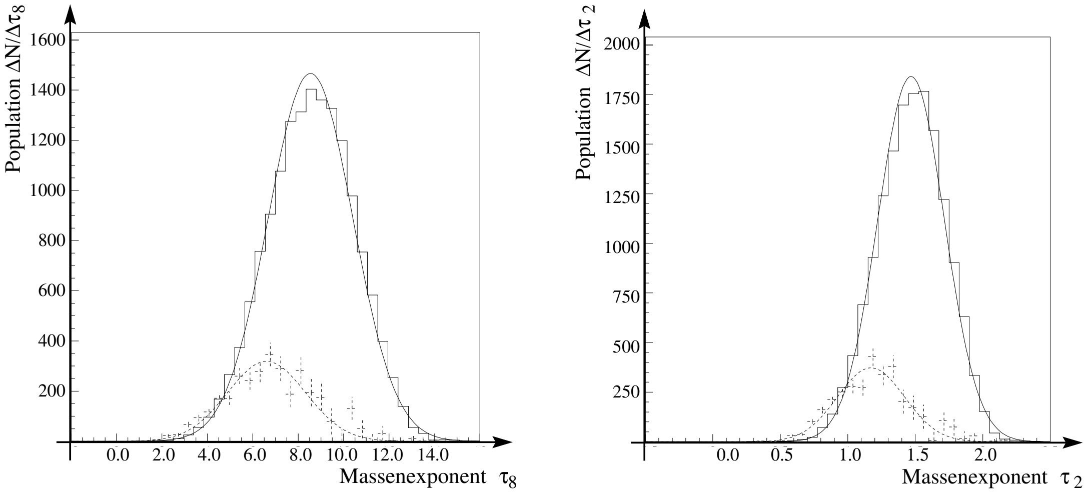


Abbildung 7.4: *Die Verteilung des Massenexponenten τ für $q = 8$ (links) und $q = 2$ (rechts) für γ–Ereignisse (gestrichelte Linie) und hadronische Ereignisse (durchgezogene Linie).*

Der multifraktale Parameter τ beschreibt, wie sich die Anzahl der Pixelgruppen, über die sich das Bild erstreckt, ändert, wenn man die Größe der Pixelgruppen variiert.

- Betrachtet man das Bild eines γ–induzierten Schauers, so ist der Rand des Bildes glatt und das Bild erstreckt sich nur über einen kleinen Bereich der Kamera. Folglich ist das Bild nicht nur in wenigen Pixelgruppen der Längenskala ℓ enthalten, was durch das multifraktale Moment $Z_q(\ell)$ beschrieben wird, sondern die Anzahl der Pixelgruppen in denen das Bild enthalten ist, ändert sich auch nur langsam, wenn man von großen zu kleineren Pixelgruppen übergeht. Der Parameter τ nimmt also kleine Werte an.

- Im Gegensatz dazu sind hadronische Bilder sehr über die Kamera verschmiert und haben diffuse Ränder. Das Bild erstreckt sich in diesem Fall nicht nur über viele Pixelgruppen, sondern die Anzahl der Pixelgruppen wächst auch noch sehr schnell an, wenn man von großen Pixelgruppen zu kleinen Pixelgruppen übergeht, was zur Folge hat, dass der Parameter τ große Werte annimmt.

Die Tabelle 7.1 gibt für alle Teleskope die Mittelwerte und Standardabweichungen einer an die γ– und Hadron–Verteilung angepassten Gauß–Kurve für zwei verschiedene Werte des Index q an. Zusätzlich sind noch die Effizienzen ϵ_p und ϵ_γ für einen Schnitt angegeben, der die Signifikanz maximal erhöht.

Verteilung des Lipschitz–Hölder–Exponenten α

Betrachtet man die Abhängigkeit von τ von q, so nimmt im Fall von Bildern hadronischer Schauer der Massenexponent τ mit steigendem q stärker zu verglichen mit Bildern γ–induzierter Schauer. Hadronische Schauer erzeugen diffuse Bilder und daher nehmen die Pixelamplituden nach der Normierung sehr kleine Werte an, im Gegensatz zu den kompakten Bildern von γ–Schauern, die

	CT_3		CT_4	
	$q=2$	$q=8$	$q=2$	$q=8$
$\langle\tau^{\gamma}\rangle$	1.18	6.65	1.19	6.58
$\langle\tau^{\mathrm{Hadron}}\rangle$	1.47	8.60	1.49	8.73
σ_{τ}^{γ}	0.24	1.65	0.23	1.69
$\sigma_{\tau}^{\mathrm{Hadron}}$	0.24	1.84	0.25	1.86
$\tau_q \leq$ Schnitt	1.25	7.38	1.30	7.36
ϵ_p	0.241±0.005	0.347±0.006	0.270±0.006	0.285±0.007
ϵ_{γ}	0.722±0.050	0.775±0.056	0.763±0.063	0.727±0.062
q–Wert	1.47±0.190	1.32±0.10	1.47±0.12	1.36±0.12
	CT_5		CT_6	
	$q=2$	$q=8$	$q=2$	$q=8$
$\langle\tau^{\gamma}\rangle$	1.17	6.61	1.22	6.93
$\langle\tau^{\gamma}\rangle$	1.47	8.54	1.51	8.82
σ_{τ}^{γ}	0.24	1.73	0.24	1.76
$\sigma_{\tau}^{\mathrm{Hadron}}$	0.25	1.85	0.24	1.84
$\tau_q \leq$ Schnitt	1.00	7.00	1.36	7.72
ϵ_p	0.055±0.003	0.263±0.005	0.350±0.007	0.340±0.008
ϵ_{γ}	0.327±0.025	0.640±0.048	0.829±0.064	0.763±0.061
q–Wert	1.39±0.11	1.25±0.09	1.40±0.10	1.31±0.11

Tabelle 7.1: *Charakterisierung der Verteilungen des Massenexponenten* τ

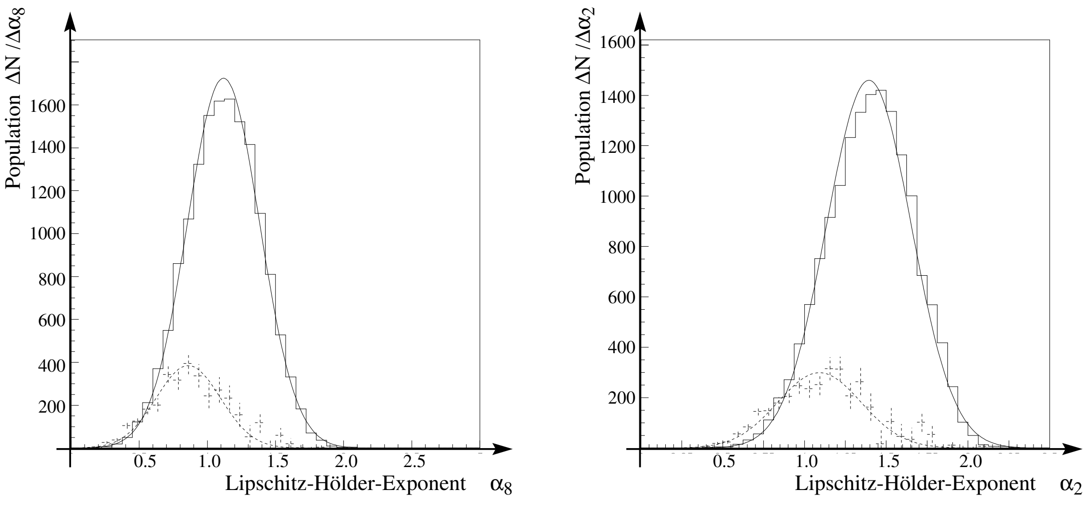


Abbildung 7.5: *Die Verteilung des Lipschitz–Hölder–Exponenten* α *für* $q = 8$ *(links) und* $q = 2$ *(rechts).*

eine große Amplitude in vergleichweise wenigen Pixeln erzeugen.

Bildet man nun Boxamplituden und potenziert diese mit q, so sind vor allem auf den kleinen

Längenskalen die Momente von Bildern hadronischer Schauer kleiner als die von Bildern γ–induzierter Schauer, wobei sich dieser Unterschied mit anwachsendem q noch verstärkt. Man erwartet deshalb für den Parameter α, der als Ableitung von $\tau(q)$ nach q definiert ist, größere Werte im Falle hadronischer Schauer.

Die Tabelle 7.2 gibt für alle Teleskope die Mittelwerte und Standardabweichungen einer an die γ– und Hadron–Verteilung angepassten Gauß–Kurve für zwei verschiedene Werte des Index q an.

	CT_3		CT_4	
	$q=2$	$q=8$	$q=2$	$q=8$
$\langle\alpha^\gamma\rangle$	1.12	0.88	1.10	0.87
$\langle\alpha^{\mathrm{Hadron}}\rangle$	1.40	1.12	1.42	1.14
σ_α^γ	0.24	0.25	0.25	0.24
$\sigma_\alpha^{\mathrm{Hadron}}$	0.26	0.27	0.26	0.27
$\alpha_q \leq$ Schnitt	1.25	0.95	1.22	0.92
ϵ_p	0.338±0.005	0.315±0.006	0.230±0.005	0.257±0.006
ϵ_γ	0.797±0.056	0.712±0.052	0.745±0.061	0.678±0.058
q–Wert	1.37±0.09	1.27±0.08	1.46±0.12	1.34±0.11
	CT_5		CT_6	
	$q=2$	$q=8$	$q=2$	$q=8$
$\langle\alpha^\gamma\rangle$	1.09	0.85	1.13	0.89
$\langle\alpha^{\mathrm{Hadron}}\rangle$	1.39	1.12	1.42	1.14
σ_α^γ	0.26	0.25	0.25	0.25
$\sigma_\alpha^{\mathrm{Hadron}}$	0.26	0.28	0.26	0.27
$\alpha_q \leq$ Schnitt	1.12	1.02	1.24	1.08
ϵ_p	0.209±0.004	0.663±0.009	0.300±0.007	0.609±0.009
ϵ_γ	0.593±0.044	0.912±0.070	0.726±0.057	0.994±0.077
q–Wert	1.30±0.09	1.12±0.08	1.33±0.11	1.21±0.10

Tabelle 7.2: *Charakterisierung der Verteilungen des Lipschitz–Hölder–Exponenten α*

Verteilung des Wavelet–Parameters β

In der Wavelet–Analyse geht man nicht von den Amplitudenwerten aus, sondern von deren Ableitung auf verschiedenen Längenskalen entlang der Basisrichtungen.

Bei Bildern hadronischer Schauer variiert die Amplitudenverteilung auf kurzen Längenskalen stärker als bei den glatten Bildern γ–induzierter Schauer. Die Wavelet–Momente $W_q^{(i)}(\ell)$ wachsen deshalb im Falle hadronischer Schauer beim Übergang von großen zu kleinen Längenskalen stärker verglichen mit γ–induzierten Schauern an, was zur Folge hat, dass die Wavelet–Parameter β_q größere Werte annehmen.

Betrachtet man die Wavelet–Analyse als diskrete Fourier–Transformation, so findet man bei Bildern hadronischer Schauer eine starke Variation der Amplitude auf auf kleinen Längenskalen im Gegensatz zu Bildern γ–induzierter Schauer, deren Amplitudenverteilung gut durch eine Gaußfunktion beschrieben werden kann und die demzufolge sehr glatt sind. Man erwartet also im Fall

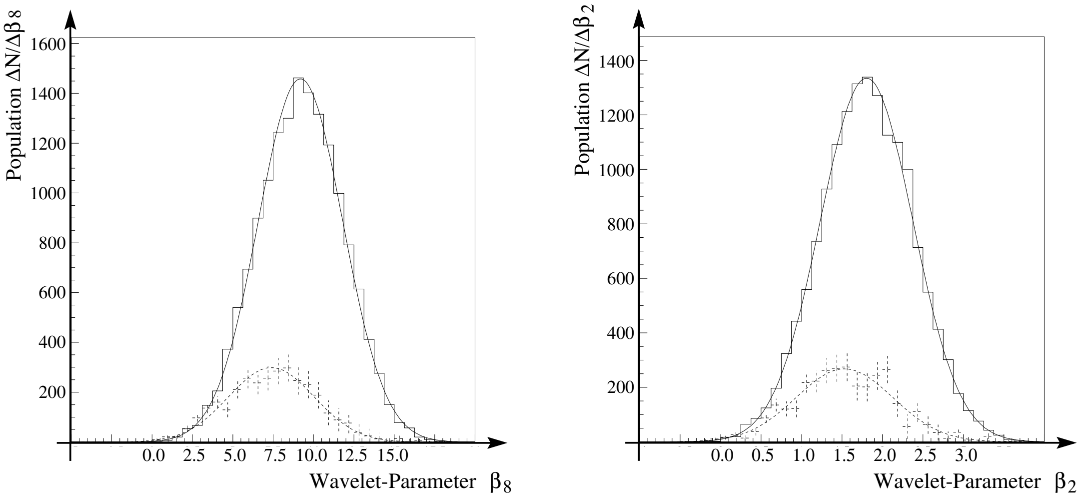


Abbildung 7.6: *Die Verteilung des Wavelet–Parameters β für $q = 8$ (links) und $q = 2$ (rechts).*

hadronischer Schauer die Anwesenheit hoher Frequenzen, was durch große Werte von β ausgedrückt wird.

Im Gegensatz dazu fehlen bei Bildern von γ–induzierten Schauern diese hohen Frequenzen: Es treten kleinere Werte für den Wavelet–Parameter β auf.

Die Tabelle 7.3 gibt für alle Teleskope die Mittelwerte und Standardabweichungen einer an die γ– und Hadron–Verteilung angepassten Gauß–Kurve für zwei verschiedene Werte des Index q an.

Verteilung des faktoriellen Parameters γ

Die Argumentation läßt sich von dem Massenexponenten $\tau(q)$ sofort auf den faktoriellen Parameter γ verallgemeinern: Die Vorschrift zur Berechnung faktorieller Momente $F_i(\ell)$ ist analog zu der multifraktaler Momente $Z_q(\ell)$, mit dem Unterschied, dass Pixelgruppen, die einen großen Teil der Gesamtamplitude tragen, im Vergleich weniger stark gewichtet werden.
Die Tabelle 7.4 gibt für alle Teleskope die Mittelwerte und Standardabweichungen einer an die γ– und Hadron–Verteilung angepassten Gauß–Kurve für zwei verschiedene Werte des Index i an.

7.1.3 Vergleich der Trennungseigenschaften mit Hillas–Parametern

Analog zu den Schnitten auf Hillas–Parameter kann man auch durch Schnitte auf multifraktale Parameter hadronische Ereignisse im Datensatz verwerfen und die Signifikanz eines γ–Signals erhöhen.

Im Vergleich zeigen jedoch die Hillas–Parameter die besseren Trennungseigenschaften, was der Vergleich mit der Tabelle 7.5 zeigt. Allgemein ergibt sich das Bild, dass der Parameter *ScWidth* die besten Trennungseigenschaften aufweise, gefolgt von *Concentration*, τ, α und γ, deren Leistung auf einem ähnlichen Niveau ist. Der Parameter *ScLength* ist wiederum weniger leistungsfähig. In der Reihenfolge bildet der Wavelet–Parameter β den Schluss.

	CT_3		CT_4	
	$q = 2$	$q = 8$	$q = 2$	$q = 8$
$\langle\beta^{\gamma}\rangle$	1.45	7.06	1.48	6.88
$\langle\beta^{\mathrm{Hadron}}\rangle$	1.81	9.25	1.86	9.52
σ_{β}^{γ}	0.50	2.28	0.57	2.39
$\sigma_{\beta}^{\mathrm{Hadron}}$	0.56	2.56	0.58	2.65
$\beta_q \leq$ Schnitt	1.90	6.50	1.75	7.24
ϵ_p	0.635±0.008	0.189±0.004	0.485±0.008	0.244±0.006
ϵ_{γ}	0.879±0.067	0.507±0.038	0.746±0.068	0.620±0.054
q–Wert	1.10±0.08	1.07±0.089	1.25±0.10	1.02±0.11
	CT_5		CT_6	
	$q = 2$	$q = 8$	$q = 2$	$q = 8$
$\langle\beta^{\gamma}\rangle$	1.53	7.39	1.61	7.68
$\langle\beta^{\mathrm{Hadron}}\rangle$	1.80	9.19	1.92	9.62
σ_{β}^{γ}	0.59	2.66	0.55	2.56
$\sigma_{\beta}^{\mathrm{Hadron}}$	0.57	2.26	0.57	2.63
$\beta_q \leq$ Schnitt	2.10	9.50	2.19	8.12
ϵ_p	0.757±0.010	0.615±0.009	0.744±0.010	0.336±0.007
ϵ_{γ}	0.889±0.071	0.822±0.065	0.912±0.078	0.658±0.055
q–Wert	1.05±0.08	1.04±0.08	1.06±0.09	1.13±0.10

Tabelle 7.3: *Charakterisierung der Verteilungen des Wavelet–Parameters* β

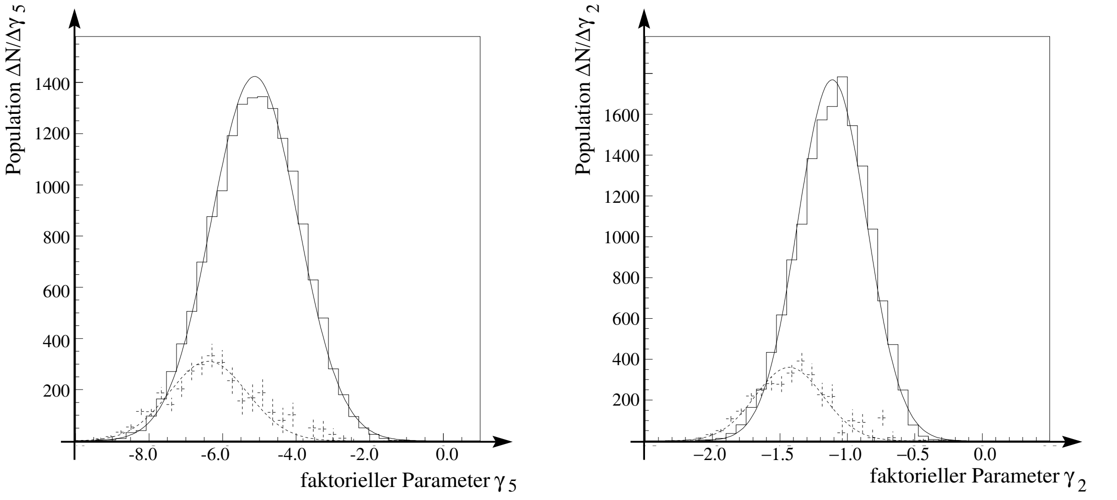


Abbildung 7.7: *Die Verteilung des faktoriellen Parameters* γ *für* $i = 5$ *(links) und* $i = 2$ *(rechts).*

Im Gegensatz zu den Hillas–Parametern, insbesondere *ScWidth*, bei denen die Breite der Verteilung der γ–Ereignisse deutlich kleiner ist im Vergleich zu hadronischen Ereignissen, sind die entsprechenden Breiten der Verteilungen multifraktaler Parameter für beide Teilchenarten vergleichbar.

	CT_3		CT_4	
	$i=2$	$i=5$	$i=2$	$i=5$
$\langle\gamma^\gamma\rangle$	-1.41	-6.34	-1.42	-6.36
$\langle\gamma^{\mathrm{Hadron}}\rangle$	-1.11	-5.08	-1.08	-5.02
σ_γ^γ	0.23	1.05	0.24	1.07
$\sigma_\gamma^{\mathrm{Hadron}}$	0.25	1.18	0.25	1.19
$\gamma_i \leq$ Schnitt	-1.35	-5.94	-1.30	-6.20
ϵ_p	0.223±0.005	0.290±0.005	0.252±0.006	0.207±0.005
ϵ_γ	0.684±0.048	0.722±0.052	0.759±0.062	0.620±0.053
q–Wert	1.45±0.10	1.34±0.09	1.51±0.12	1.36±0.12
	CT_5		CT_6	
	$i=2$	$i=5$	$i=2$	$i=5$
$\langle\gamma^\gamma\rangle$	-1.43	-6.39	-1.37	-6.17
$\langle\gamma^{\mathrm{Hadron}}\rangle$	-1.11	-5.13	-1.07	-4.95
σ_γ^γ	0.25	1.08	0.26	1.12
$\sigma_\gamma^{\mathrm{Hadron}}$	0.26	1.18	0.25	1.20
$\gamma_i \leq$ Schnitt	-1.36	-6.26	-1.42	-5.5
ϵ_p	0.231±0.005	0.255±0.004	0.325±0.014	0.469±0.006
ϵ_γ	0.652±0.047	0.585±0.044	0.782±0.187	0.839±0.061
q–Wert	1.36±0.10	1.24±0.09	1.37±0.33	1.23±0.11

Tabelle 7.4: *Charakterisierung der Verteilungen des faktoriellen Parameters γ*

Betrachtet man den Ausdruck $\left(\langle x^{(p)}\rangle - \langle x^\gamma\rangle\right)/\sigma_x^\gamma$ als Maß für die Trenneigenschaften eines Parameters x, so sieht man, dass für die Hillas–Parameter, deren Verteilung durch ein kleineres $\sigma^{(\gamma)}$ beschrieben wird, der Ausdruck größere Werte annimmt, obwohl der Abstand der Mittelwerte der γ– und der Hadron–Verteilung für Hillas– und multifraktale Parameter vergleichbar groß ist.

Aus diesem Grund ist die γ–Effizienz und damit der q–Faktor der multifraktalen Parameter kleiner und die Trennungeigenschaften schlechter verglichen mit den Hillas–Parametern.

Die Teleskope sind in Bezug auf die Trennungseigenschaften aller Parameter innerhalb der Fehler kompatibel.

7.1.4 Verlauf der Parameter mit dem Index q

Wie oben schon dargestellt, gehen bei großen Werten für q (bzw. i) Pixelgruppen mit großen Einträgen stark in der Berechnung der Momente ein. Es ist daher interessant zu untersuchen, ob die Trennungseigenschaft der multifraktalen Parameter von dem Index q abhängen. Wie die Tabellen 7.1, 7.2, 7.3 und 7.4 zeigen, bleiben die Trenungseigenschaften der Parameter unabhängig von ihrer Ordnung.

	CT$_3$			CT$_4$		
	ScWidth	ScLength	CONC	ScWidth	ScLength	CONC
$\langle x^\gamma \rangle$	1.04	0.99	0.47	1.01	0.98	0.48
$\langle x^{\mathrm{Hadron}} \rangle$	1.58	1.26	0.35	1.61	1.19	0.34
σ^γ	0.18	0.19	0.13	0.17	0.18	0.12
σ^{Hadron}	0.38	0.29	0.10	0.41	0.33	0.09
$x \leq$ Schnitt	1.1	1.2	0.48	1.1	1.2	0.42
ϵ_p	0.133±0.004	0.404±0.006	0.331±0.006	0.117±0.004	0.440±0.008	0.291±0.006
ϵ_γ	0.663±0.044	0.710±0.054	0.785±0.054	0.746±0.056	0.761±0.068	0.808±0.065
q–Wert	1.82±0.12	1.12±0.08	1.37±0.10	2.17±0.17	1.15±0.10	1.49±0.12
	CT$_5$			CT$_6$		
	ScWidth	ScLength	CONC	ScWidth	ScLength	CONC
$\langle x^\gamma \rangle$	1.01	1.00	0.50	1.06	1.00	0.49
$\langle x^{\mathrm{Hadron}} \rangle$	1.57	1.19	0.35	1.55	1.18	0.34
σ^γ	0.19	0.20	0.13	0.21	0.21	0.12
σ^{Hadron}	0.40	0.28	0.11	0.37	0.27	0.10
$x \leq$ Schnitt	1.1	1.2	0.46	1.1	1.2	0.41
ϵ_p	0.136±0.004	0.608±0.009	0.221±0.005	0.122±0.004	0.621±0.010	0.298±0.006
ϵ_γ	0.671±0.045	0.878±0.068	0.664±0.048	0.583±0.044	0.896±0.074	0.804±0.061
q–Wert	1.82±0.13	1.13±0.08	1.41±0.10	1.67±0.13	1.14±0.10	1.47±0.12

Tabelle 7.5: *Charakterisierung der Verteilungen der Hillas–Parameter (Der Schnitt auf den Parameter Concentration erfolgt auf große Werte.).*

Abhängigkeit der multifraktalen Parameter von q

Die Verteilungen der Parameter lassen sich einfach durch den Mittelwert und die Standardabweichung einer angepassten Gaußkurve darstellen. In der Abbildung 7.8 ist nun in Abhängigkeit von q der Mittelwert der Verteilung des Massenexponenten τ mit dessen Standardabweichung als Fehler für γ–Ereignisse (Punkte) und hadronische Ereignisse (Dreiecke) aufgetragen.

Ein Vergleich der Abbildung 7.8 mit der Abbildung 6.5 zeigt, dass das typische Verhalten des Massenexponenten τ_q, wie es für den Fall eines wirklichen Multifraktals hergeleitet wurde, auch bei der Analyse von Čerenkov–Bildern wiederfindet. Analoges gilt für die Parameter $\alpha(q)$ und $f(\alpha)$, wie der Vergleich mit der Abbildung 7.9 zeigt.

Aus diesem Vergleich folgt, dass nicht nur das generische Verhalten der multifraktalen Parameter wiedergefunden wurde, sondern auch, dass sich die multifraktalen Eigenschaften der Bilder von γ–Kandidaten und Hadron–Kandidaten fundamental unterscheiden.

Eine weitere Eigenschaft zeigt der Verlauf der Kurve $f(\alpha)$ in der Abbildung 7.9: Der Parameter $f(\alpha)$ gibt an, wie viele Gebiete des Bildes durch einen bestimmtes α beschrieben werden. Wegen der kleineren Werte für f bei einem gegebenen α für hadronische Schauer folgt mit der Gleichung $N(\alpha) \sim \ell^{-f(\alpha)}$, daß die Anzahl N der Gebiete des Bildes, die durch ein bestimmtes α beschrieben werden, größer ist und dass Bilder hadronischer Schauer in Bezug auf ihre multifraktalen Eigenschaften im Vergleich zu γ–Schauern einförmiger sind.

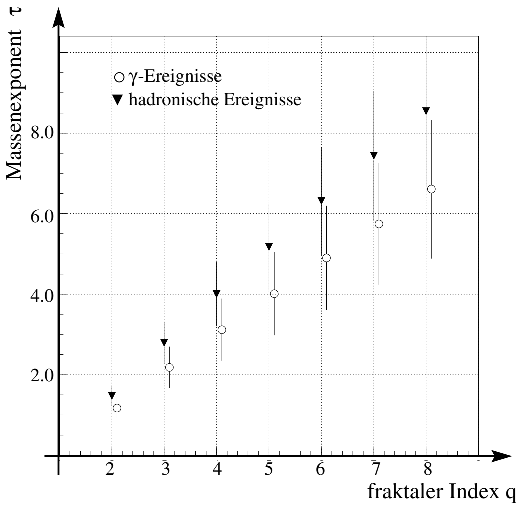


Abbildung 7.8: *Mittelwerte der Verteilungen des Parameters τ_q in Abhängigkeit von q.*

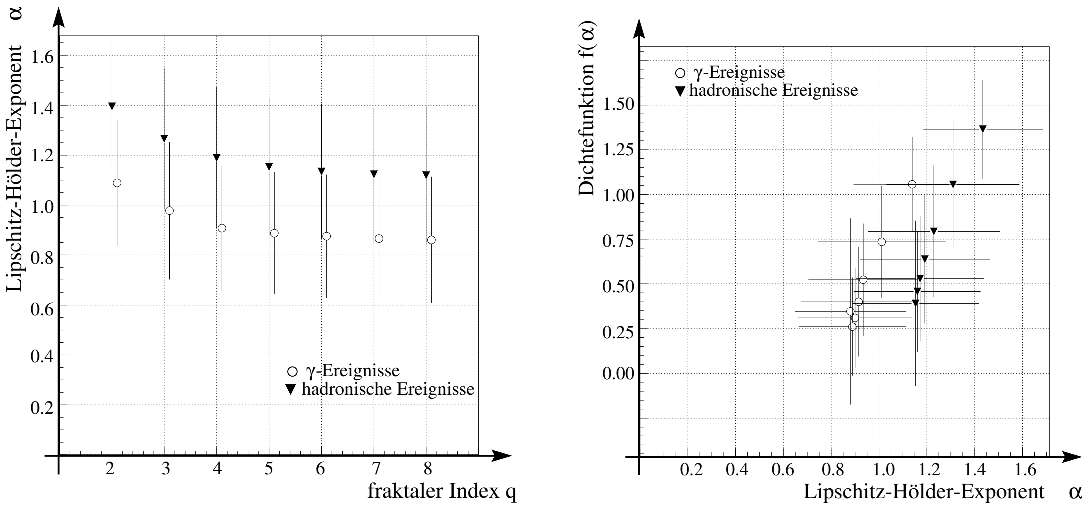


Abbildung 7.9: *Mittelwerte der Verteilungen der Parameter $\alpha(q)$ (links) und $f(\alpha)$ (rechts).*

Abhängigkeit der faktoriellen und Wavelet–Parameter von q

Die faktoriellen Parameter γ_i und die Wavelet–Parameter β_q zeigen ein analoges Verhalten zu dem Massenexponent τ_q der multifraktalen Analyse. Der Überlapp der Verteilung für Bilder γ–induzierter und Hadron–induzierter Schauer ist wieder unabhängig von der Ordnung q bzw. i des Parameters.

Separationseigenschaften in Abhängigkeit von q

Wie man in den Abbildungen 7.8 und 7.9 erkennen kann, ist die Überschneidung der Verteilungen der Parameter für γ–Schauer und für hadronische Schauer allerdings unabhängig von q immer vergleichbar groß. Damit verbessert sich die γ/Hadron–Separation nicht bei bestimmten Werten für q bzw. i.

Korrelation von multifraktalen Parametern zu zwei verschiedenen Werten für q

Die Trennungseigenschaften der multifraktalen Parameter zu verschiedenen Werten für q sind vergleichbar, was zu Ursache hat, dass diese Parameter stark miteinander korreliert sind. In der Abbildung 7.10 sind zwei Streudiagramme abgebildet, die die Korrelation der Massenexponenten τ zu zwei verschiedenen Wertepaaren der Indizes q zeigen.

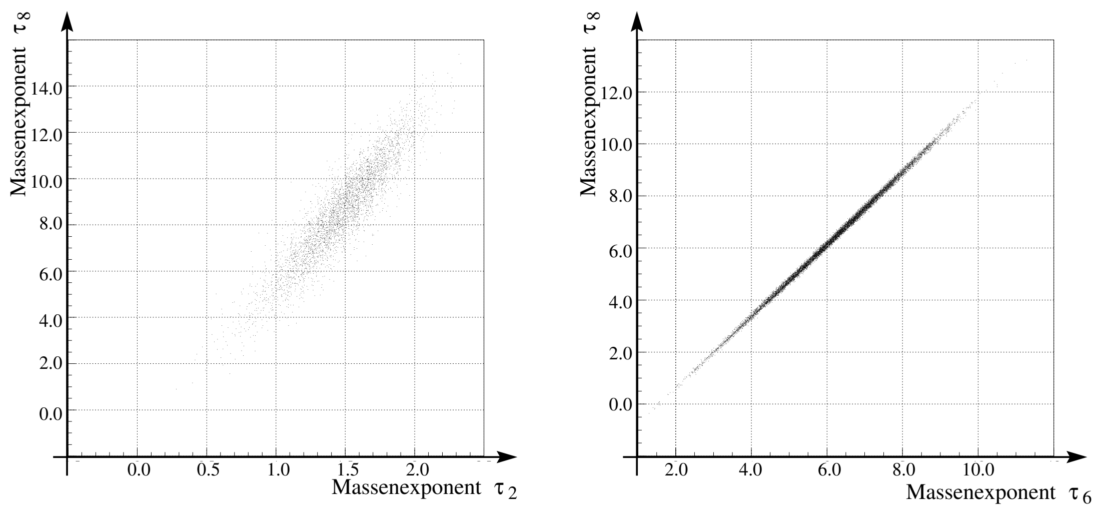


Abbildung 7.10: *Korrelationen der multifraktalen Parametern zu zwei verschiedenen Wertepaaren des Index q: τ_8 gegen τ_2 (links) und τ_8 gegen τ_6 (rechts).*

Diese Korrelation lässt sich einfach erklären:
Unter der Annahme, dass das Bild in wenigen Pixelgruppen enthalten ist, kann man den Massenexponenten τ gleich $\log Z_q(\ell)/\log \ell = q \cdot \log(\sum \text{Amplitude})/\log \ell$ setzen. Der Quotient zweier Massenexponenten wird dann proportional zu dem Quotienten der Indizes q: $\tau_{q_1}/\tau_{q_2} = q_1/q_2$.

Die Steigung des Bandes der Punkte $(\tau_{q_1}|\tau_{q_2})$ wird also umso größer, je größer der Quotient der Ordnung der multifraktalen Parameter ist (vergleiche in Abbildung 7.10 die Abbildung links mit der Abbildung rechts).

In vollständiger Analogie lassen sich auch die Korrelationen der Wavelet–Parameter $\beta_q^{(i)}$ und die der faktoriellen Parameter γ_i behandeln.

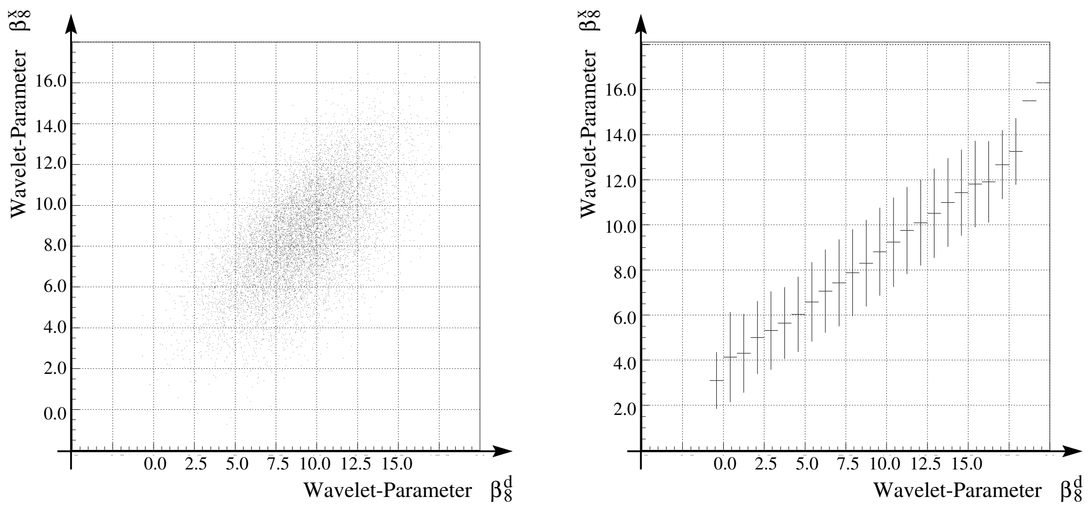


Abbildung 7.11: *Korrelation der Wavelet–Parameter $\beta_8^{(x)}$ mit $\beta_8^{(d)}$. Die Parameter wurden für den gleichen Wert des Index q, jedoch für unterschiedliche Ausbreitungsrichtungen der Wavelets bestimmt. Streudiagramm aller Ereignisse (links) und Folge der Mittelwerte und Standardabweichungen für die jeweiligen $\beta_8^{(x)}$–Intervalle (rechts).*

Korrelation von Wavelet-Parametern zu zwei versch. Basiswavelets

Im Folgenden wird wegen der linearen Korrelation der Wavelet–Parameter zu verschiedenen Ausbreitungsrichtungen nur der Wavelet–Parameter $\beta^{(d)}$ betrachtet, da deren Eigenschaften vergleichbar sind und die Hinzunahme weiterer Wavelet–Parameter keine neuen Informationen liefert.

7.2 Korrelationen

7.2.1 Korrelationen der Parameter mit Hillas–Parametern

Es ist interessant zu untersuchen, ob durch die Verwendung der multifraktalen Parameter parallel zu den üblichen Hillas–Parameter eine völlig neue Beschreibung der Schauerbilder erreicht wird, oder ob die multifraktalen Parameter mit den Hillas–Parametern korreliert sind. Damit läst sich auch untersuchen, ob kombinierte Schnitte auf die Parameter die γ/Hadron–Separation verbessern.

Korrelation mit *ScWidth*

Die Abbildung 7.12 zeigt, dass der Massenexponent $\tau(q)$ aus der multifraktalen Analyse mit dem Hillas–Parameter *ScWidth* linear korreliert ist. Analoges gilt für den Wavelet–Parameter $\beta(q)$ und den faktoriellen Parameter γ_i.
Mit zunehmender Ausdehnung der Schauerbilder nimmt auch der Wert der multifraktalen Momente $Z_q(\ell)$ zu, insbesondere derjenigen, die auf kleinen Längenskalen definiert sind. Damit ergibt sich ein schnelles Anwachsen der Momente, wenn man von großen zu kleinen Längenskalen übergeht, was durch größe Werte für den Parameter τ ausgedrückt wird. Entsprechendes gilt, wenn auch in geringerem Maße, für den Parameter *ScLength*.

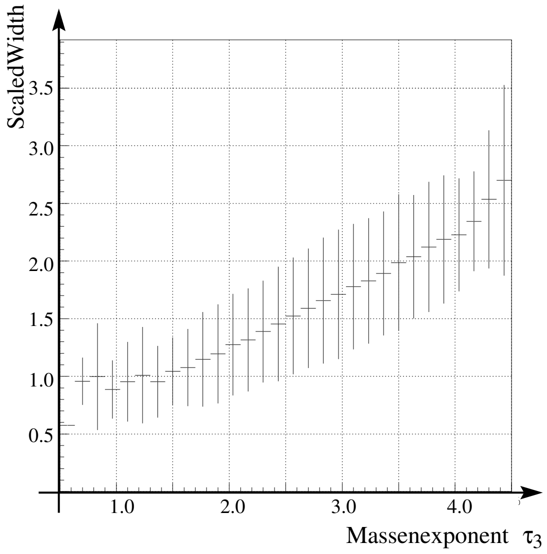


Abbildung 7.12: *Korrelation des Hillas–Parameters ScWidth mit dem Massenexponenten* τ_3.

Korrelation mit *CONCENTRATION*

Der Hillas–Parameter *Concentration* ist ebenfalls, wie die Abbildung 7.13 zeigt, mit dem Massenexponenten τ linear korreliert.

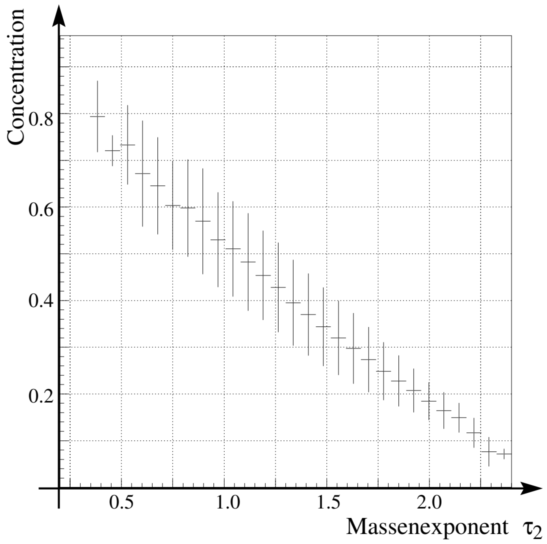


Abbildung 7.13: *Korrelation des Hillas–Parameters Concentration mit dem Massenexponenten* τ_2.

Bilder γ–induzierter Schauer führen wegen ihrer Kompaktheit zu großen Werten für den Parameter *Concentration* und zu kleinen Werten für den Massenexponenten τ. Im Gegensatz dazu werden Bilder hadronischer Schauer durch kleine Werte des Parameters *Concentration* und große Werte für den Massenexponenten τ beschrieben.

Die multifraktalen Parameter sind also mit den Hillas–Parametern linear korreliert. Damit ist es schwierig, mit kombinierten Schnitten auf beide Typen von Parametern die γ/Hadron–Separation zu verbessern.

7.2.2 Abhängigkeit von der Bildhelligkeit

Korrelation mit *SIZE*

Die multifraktalen Parameter zeigen, obwohl die Amplitudenverteilung bei der Berechnung der Parameter auf eins normiert wird, eine Abhängigkeit von der Bildhelligkeit, wie am Beispiel des Parameters τ_8 in dem Streudiagramm 7.14 zu sehen ist:

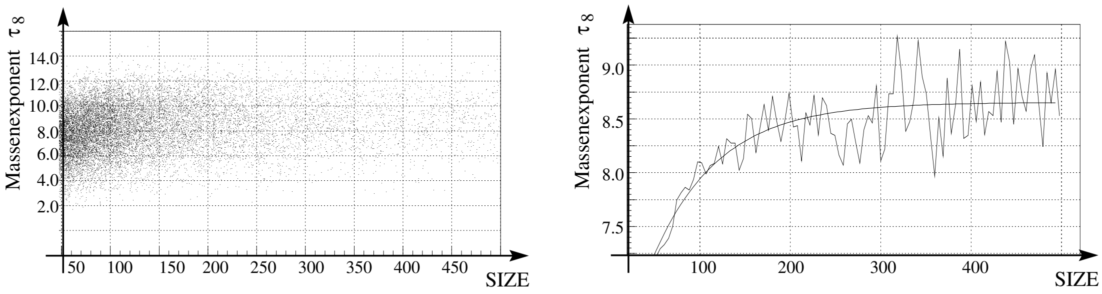


Abbildung 7.14: *Abhängigkeit der multifraktalen Parameter von der Bildhelligkeit: Streudiagramm des multifraktalen Parameters τ_8 gegen die Bildhelligkeit (links) und der Fit der Modellfunktion (rechts)*

Die Ursache dieser Korrelation ist die Eigenschaft von Schauerbildern mit großen *SIZE*–Werten, eine große Ausdehnung in der Kamera zu haben und folglich sich selbst über mehrere Boxen der größten Längenskala zu erstrecken. Damit nimmt die Zahl der Boxen stark zu, wenn man die Längenskala verkleinert, was sich wiederum in großen Werten für die multifraktalen Parameter widerspiegelt.

Durch einen Schnitt auf einen Wert von τ_8 der für Werte im Maximum der *SIZE*–Verteilung optimal wurde, werden γ–Ereignisse mit größerer *SIZE* verworfen, was zu einer Verschlechterung der Trennungseigenschaften führt. Es ist also angebracht, diese *SIZE*–Abhängigkeit zu beseitigen, was im folgenden Abschnitt dargestellt wird.

Modellierung der *SIZE*–Abhängigkeit

Obwohl man bei der Berechnung von multifraktalen Parametern von einer auf eins normierten Amplitudenverteilung ausgeht, zeigen die Parameter noch eine geringe Abhängigkeit von der Gesamthelligkeit des Bildes. Um diese Abhängigkeit zu beseitigen werden die Parameter durch den Erwartungswert bei einer gegebenen Bildhelligkeit dividiert; dieser Erwartungswert folgt aus einer einfachen Parametrisierung:

$$\tau_{\text{expected}} = a\left[1 - \exp\left(-(x+b)/c\right)\right], \text{ bzw.} \tag{7.4}$$
$$\beta^{(i)}_{\text{expected}} = a\left[1 - \exp\left(-(x+b)/c\right)\right]. \tag{7.5}$$

Der Streudiagramm, in dem der entsprechende multifraktale Parameter gegen die Bildhelligkeit für hadronische Ereignisse aufgetragen ist, wurde von auf der *SIZE*–Achse im Bereich von 40 bis 500 Photoelektronen in 25 gleich große Intervalle aufgeteilt. Für jedes dieser Intervalle wurde der Mittelwert $\langle\tau\rangle$ bzw. $\langle\beta\rangle$ und die Standardabweichung σ_τ bzw. σ_β der Verteilung des multifraktalen Parameters berechnet. Die Zahlen a, b und c des Modells folgen aus einem χ^2–Fit der Funktionen 7.4 bzw. 7.5 an die Mittelwerte der Verteilung in jedem Intervall mit den Standardabweichungen als Fehler und wurden für jeden Wert des Index q und für ein Basiswavelet (in diesem Fall $\beta = \beta^{(d)}$) exemplarisch für das Čerenkov–Teleskop CT$_4$ bestimmt (siehe Tabelle 7.6). In dem Analyseprogramm besteht jedoch die Möglichkeit, diese Korrekturen für jedes Teleskop einzeln vorzunehmen.

q		8	7	6	5	4	3	2
τ	a	9.35	8.14	6.90	5.65	4.377	3.06	1.64
	b	75.60	75.25	75.47	78.14	78.25	85.31	88.38
	c	68.02	67.90	68.01	69.44	69.83	74.61	85.53
β	a	10.84	9.49	8.13	6.76	5.36	3.91	2.34
	b	85.00	85.79	87.69	89.78	92.19	91.63	69.73
	c	100.95	103.20	103.59	106.43	110.89	118.01	129.03

Tabelle 7.6: *typische Werte für a, b und c in dem SIZE–Modell für die Parameter τ und $\beta^{(d)}$ in Abhängigkeit von q für das Čerenkov–Teleskop CT$_4$*

Skalierte Parameter

Die Verteilung der Hadronen sollte jetzt unabhängig von der Bildhelligkeit sein und ein Maximum bei dem Wert eins haben:

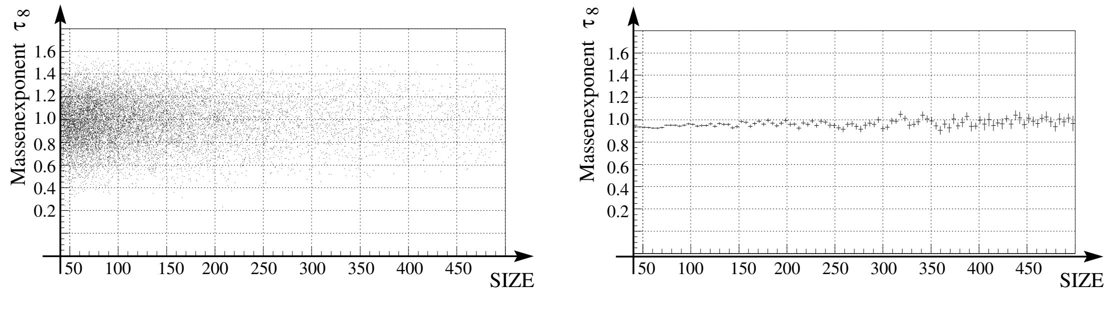


Abbildung 7.15: *Beseitigung der Abhängigkeit von der Bildhelligkeit: Streudiagramm der Parameters τ_8 gegen die Bildhelligkeit (links) und die Folge der Mittelwerte der Verteilung von τ_8 in den einzelnen SIZE–Intervallen (rechts).*

Wie man in der Abbildung 7.15 sieht, verläuft das Band der hadronischen Ereignisse in dem Streudiagramm flach, was bedeutet, dass die Abhängigkeit des Parameters von der Bildhelligkeit beseitigt wurde. Die Mittelwerte in den einzelnen *SIZE*–Intervalle sind innerhalb ihrer Fehler mit dem Wert eins verträglich.

Die Separationseigenschaft der Parameter verbessert sich nicht sehr, was zur Ursache hat, dass die natürliche Schwankung der Parameter groß ist verglichen mit der Variation mit der Bildhelligkeit *SIZE* und dass die größte Variation in einem *SIZE*–Bereich auftritt, in dem vergleichsweise wenige Ereignisse liegen.

7.2.3 Abhängigkeit der Parameter von der Lage des Bildes

Die multifraktalen Parameter zeigen eine Abhängigkeit von der Lage des Schauers in der Kamera, die auf die Form und Größe der Pixelgruppe zurückzuführen ist.

Aliasing-Effekt bei großen Pixelgruppen

Berechnet man multifraktale Momente auf der größten Längenskala, so erwartet man einen Einfluss der Lage der Schauerellipse relativ zu den Pixelgruppen. Liegt die Ellipse, auf die der Schauer abgebildet wird, in einer Pixelgruppe der größten Längenskala, so wird das entsprechende Moment größer als wenn die Schauerellipse auf der Grenze zwischen zwei oder sogar drei Pixelgruppen zu liegen kommt.

Diese Abbhängigkeit stellt die Abbildung 7.16 dar. In den Abbildungen ist jeweils der der Massenexponent τ_8 gegen den Abstand des Schwerpunkts der Schauerellipse vom Kamerazentrum aufgetragen.Wie die Abbildung 7.16 zeigt, oszilliert der Mittelwert der Verteilung von $\tau(q)$ mit einer Periode von 2°, was der Ausdehnung der größten Pixelgruppe entspricht. Beschränkt man sich bei der Berechnung des Massenexponenten auf die kleinen Pixelgruppen oder verwirft alle Bilder mit einer Ausdehnung größer 1°, so verschwindet diese Abhängigkeit.
Desweiteren ist es interessant zu untersuchen, ob die Anpassung einer Gerade zur Berechnung des Massenexponenten über die betrachteten Längenskalen konstant bleibt oder ob sich die Massenexponenten ändern. Dazu wurde der Massenexponent $\tau(q)$ aus den Momenten $Z_q(\ell)$ berechnet, wobei die Längenskala ℓ nur die beiden kleinsten bzw. die drei kleinsten Pixelgruppen umfasst (vgl. in Abbildung 7.17).

Man kann eine Abhängigkeit des Massenexponenten τ von dem Längenskalenbereich erkennen, auf dem τ berechnet wird, diese Abhängigkeit ist bei großen Werten für q am ausgeprägtesten.
Bildet man die logarithmische Ableitung des multifraktalen Moments $Z_q(\ell)$ nach der logarithmischen Größe der Längenskala ℓ, wobei man sich auf die kleinen Längenskalen beschränkt, so zeigt die Abbildung 7.17, dass in dieser doppeltlogarithmischen Auftragung die Momente keiner Geraden folgen und dass der Parameter τ unterschätzt wird, wenn die größen Pixelgruppen mit in die Berechnung eingehen.

Die Trennungseigenschaften bleiben, wie die Abbildung 7.17 zeigt, davon unberührt. Es sind jeweils die Verteilungen der γ–Ereignisse (gestrichelte Linie) und der hadronischen Ereignisse (durchgezogene) Linie dargestellt.

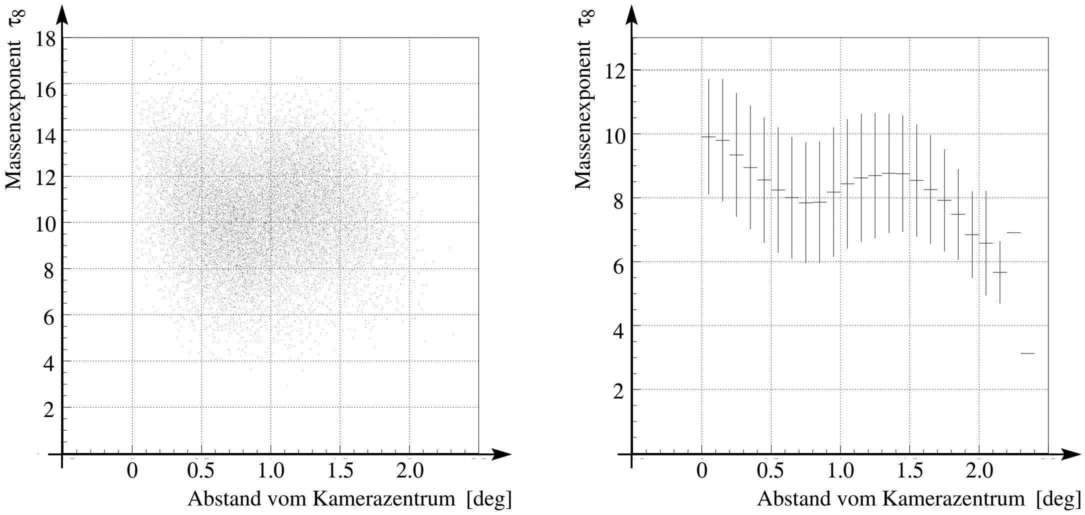


Abbildung 7.16: *Abhängigkeit des Massenexponenten τ_8 von der Lage der Schauerellipse in der Kamera.*

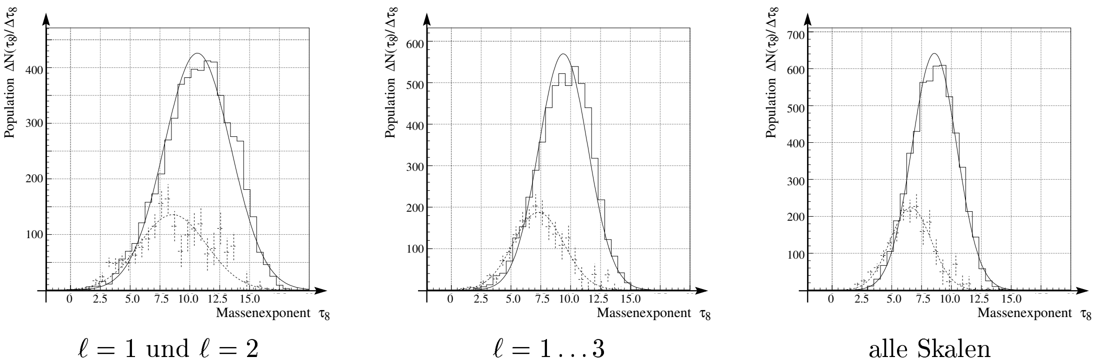


Abbildung 7.17: *Berechnung des Massexponenten τ_8 auf kleinen Längenskalen.*

Ausrichtung des Schauers in der Kamera

Die multifraktalen Parameter zeigen keine Abhängigkeit von der Ausrichtung der Schauerellipse in der Kamera, was die Abbildung 7.18 am Beispiel des Massenexponenten τ demonstiert. Da in einem Sechseck das Verhältnis der Abstände zwischen dem Mittelpunkt zu einer Ecke bzw. zu der Mitte einer seite $\sqrt{3}/2$ beträgt, erwartet man für die typische Variation eines Parameters einen Wert von zirka 15%. Allerdings sind davon nur die multifraktalen Momente $Z_q(\ell)$ beeinflusst, die auf Längenskalen definiert sind, die der Ausdehnung eines Schauers entsprechen. Bei der Berechnung des Massenexponenten τ ermittelt man die Steigung einer Ausgleichsgeraden durch die Punkte $\log(Z_q(\ell))|\log(\ell)$. Von diesen Punkten zeigt nur der Punkt für $\ell = 4$ eine Abhängigkeit von der Ausrichtung der Schauerellipse und variiert in der Größenordnung von 15%. Die Steigung der Ausgleichsgeraden ist im Wesentlichen schon durch die Punkte $\ell = 1 \dots 3$ festgelegt und schwankt nur geringfügig.

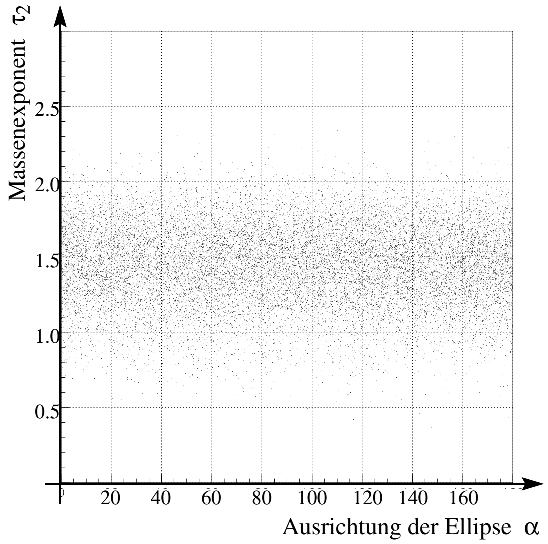


Abbildung 7.18: *Abhängigkeit des Massenexponenten τ von der Ausrichtung der Schauerellipse.*

Im Gegensatz dazu sind sind die Wavelet–Parameter β empfindlich auf die Ausrichtung des Schauerbildes in der Kamera: Die Variation des Parameters β ist vergleichbar mit der natürlichen Breite der Verteilung (Abbildung 7.19). Das Maximum in der Abbildung 7.19 verschiebt sich je nach Ausbreitungsrichtung des Basiswavelets um 60°.

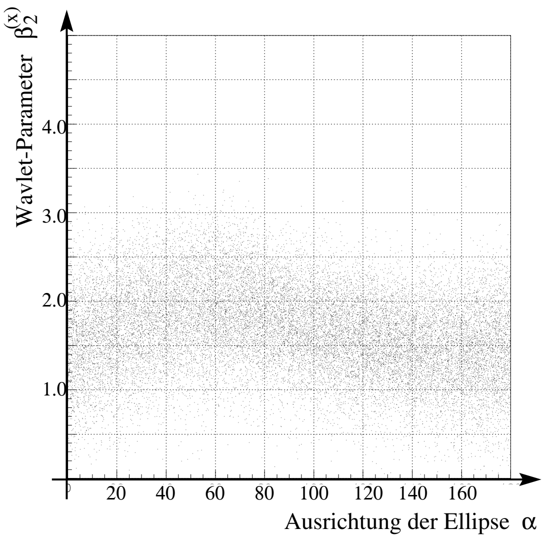
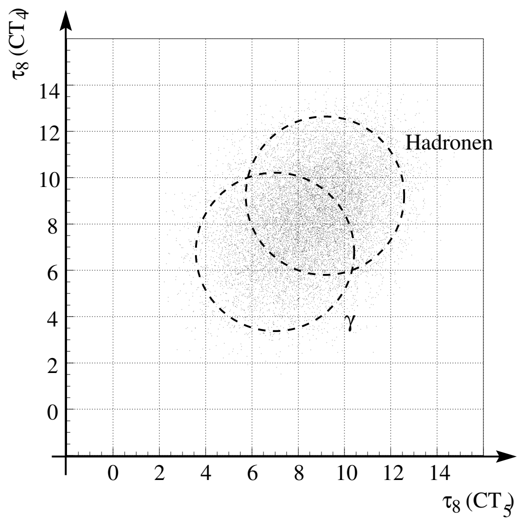


Abbildung 7.19: *Abhängigkeit des Wavelet–Parameters β von der Ausrichtung der Schauerellipse.*

7.2.4 Mittelung über mehrere Teleskope

Neben der einfachen Mittelung der Parameter über alle getriggerten Teleskope wurden auch die Bildung des Mittelwerts, bei dem die Parameter linear oder logarithmisch mit der *SIZE* gewichtet wurden, bzw. der Mittelwert über die Parameter bei denen mit dem oben beschriebenen Modell die *SIZE*–Abhängigkeit korrigiert wurde, ausprobiert.

Die Leistung der Trenneigenschaften der multifraktalen Parameter für das Teleskopsystem sank sogar noch unter die der Parameter für einzelne Teleskope, was dadurch verursacht wird, dass die Breite der Verteilung der γ–Ereignisse vergleichbar mit dem Abstand des Mittelwertes der γ–Verteilung von der Hadron–Verteilung ist (vgl. Abbildung 7.20).



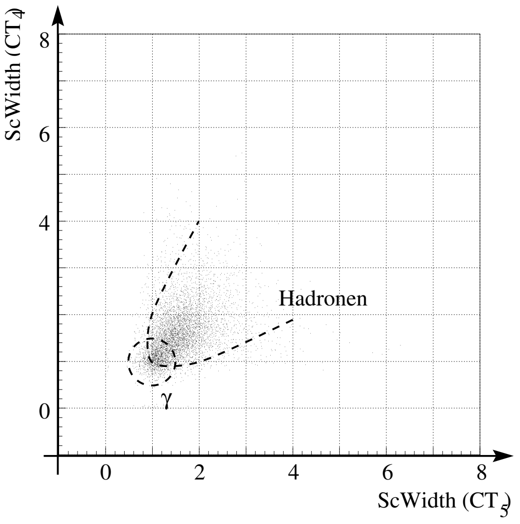


Abbildung 7.20: *Korrelation des Massenexponenten τ und des Hillas–Parameters ScWidth für zwei verschiedene Teleskope.*

Im Gegensatz dazu zeigt die Auftragung des Hillas–Parameters *ScWidth* für ein Teleskop gegen *ScWidth* für ein zweites Teleskop ein besseres Verhalten: γ–Kandidaten befinden sich in einem Kreis um den Punkt (1|1), während sich die Hadron–Kandidaten in einem „Keil“ entlang der Diagonalen befinden. Bei der Mittelung nimmt *MScWidth* für γ–Kandidaten Werte bei eins, für Hadron–Kandidaten abhängig von der Anzahl der Teleskope, die das Ereignis registriert haben, größere Werte an.

Kapitel 8

Klassifikation der Ereignisse mit neuronalen Netzen

Wegen der starken Korrelation zwischen den Parametern ist es schwierig, kombinierte Schnitte auf mehrere Parameter zur Verbesserung der γ/Hadron–Separation durchzuführen. In dieser Arbeit wurde deshalb der Ansatz verfolgt, mittels neuronaler Netze eine Klassifikation der Ereignisse vorzunehmen. Als Eingangswerte für das Netz dienen die aus den Bildern abgeleiteten Parameter.

8.1 Funktionsweise eines neuronalen Netzes

8.1.1 Einfache Neuronen

Funktionsweise eines Neurons

Die Bezeichnung Neuron steht im Folgenden für eine Rechenvorschrift, in der die gewichtete Summe der Werte in allen Eingangskanälen gebildet wird und dieser Wert mit einer Schwelle verglichen wird (vgl. Abbildung 8.1).

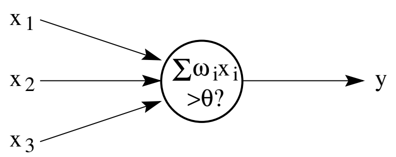


Abbildung 8.1: *Skizze zur Veranschaulichung der Funktion eines einfachen Neurons*

Die „Antwort“ y des Neurons auf einen Vektor x_i von Eingangswerten ist die Response–Funktion $g(\sum_i \omega_i x_i)$. Sie soll bei der Schwelle θ von dem Wert null für die Werte $x < \theta$ auf eins für $x > \theta$ ansteigen. Bei fortgeschrittenen Anwendungen wird die Funktion $g(x)$ so gewählt, dass sie stetig differenzierbar ist und sie sich bei $x = \theta$ linear verhält. Durch die Wahl eines speziellen $g(x)$ kann man beeinflussen, wie schnell die Response–Funktion diesen Übergang vollzieht.

Entscheidungsflächen

Die n Werte in den Eingangskanälen eines Neurons kann man als n–dimensionalen Vektor $\vec{x}$ auffassen. In dem Parameterraum (*feature space*), in dem die einzelnen Eingangswerte x_i entlang der Achsen i aufgetragen werden, entspricht jedem Vektor ein Punkt.
Kann man, wie in der Zeichnung 8.2 an einem einfachen zweidimensionalen Beispiel gezeigt wird, die Population der Punkte $\vec{x}$, die man klassifizieren will, durch eine Ebene trennen, so genügt es, den Normalenvektor $\vec{\omega}$ und einen Aufpunkt $\vec{x}_0$ zu kennen. Es gilt dann:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{x} - \underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{x}_0}_{=\theta} \begin{cases} > 0 & \vec{x} \text{ oberhalb der Ebene} \\ < 0 & \vec{x} \text{ unterhalb der Ebene} \end{cases} \tag{8.1}$$

Linearkombinationen $\omega_i \cdot x_i$ aus dem Vektor $\vec{x}$ und dem Vektor der Gewichte $\vec{\omega}$ entsprechen dem Skalarprodukt $\vec{\omega} \cdot \vec{x}$. Der Vergleich mit den eingestellten Schwellen θ geschieht dadurch, dass man als Response–Funktion g(x) die Heaviside–Funktion $\Theta(\vec{\omega} \cdot \vec{x} - \theta)$ einsetzt: Sie nimmt den Wert eins an, wenn sich der Vektor $\vec{x}$ oberhalb der Ebene befindet und null sonst. Damit klassifiziert das Neuron Vektoren $\vec{x}$, die in einer Halbebene liegen, als zu einer Population gehörig (Abbildung 8.2).

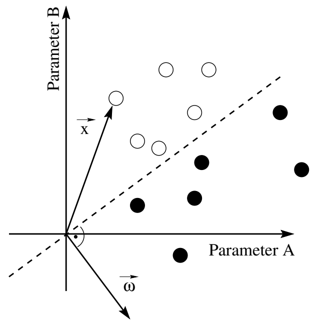


Abbildung 8.2: *Dargestellt sind zwei Populationen im Parameterraum, die durch eine Ebene getrennt sind. Die Gewichte des neuronalen Netzes entsprechen den Koordinaten des Normalenvektors. Der Schwellenwert ist auf $\theta = 0$ gesetzt.*

Angleichen der Gewichte $\tilde{\omega}$ und Schwellen $\vec{\theta}$

Der interessante Ansatz, der bei neuronalen Netzen verfolgt wird, ist, dass man dem Netz einen bereits klassifizierten Datensatz präsentiert und die Gewichte $\tilde{\omega}$ und Schwellenwerte $\vec{\theta}$ so lange verändert, bis der Ausgabewert des neuronalen Netzes mit der Klassifikation übereinstimmt.

Einen Beweis, dass im Falle linear–separierbarer Probleme und Neuronen mit linearem Response ($g(x) = x$) der Satz dieser Parameter durch ein iteratives Verfahren gefunden werden kann und dass dieses Verfahren konvergiert, findet man in [HER91].

Grenzen einfacher Neuronen

Lassen sich die Populationen, die man klassifizieren will, im Parameterraum nicht durch eine einfache Ebene trennen, so versagt das Neuron. Ein Beispiel dafür ist ein Neuron, das die Funktion eines logischen XOR–Gatters nachbilden soll. Wie die Abbildung 8.3 zeigt, findet man keine Gerade, die die zwei Klassen trennt.

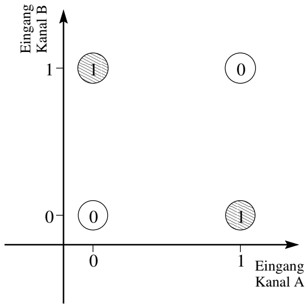


Abbildung 8.3: *Das XOR–Problem: Dargestellt ist in Abhängigkeit von den Eingangwerten auf den Achsen der Ausgabewert bei XOR–Verknüpfung. Man kann keine Gerade finden, die die zwei Klassen trennt.*

8.1.2 Multilayer–Netze

Um Probleme in den Griff zu bekommen, deren Entscheidungsflächen nicht einfache Ebenen sind und die deshalb nicht zur Klasse der linear–separierbaren Probleme gehören, kann man mehrere Neuronen zusammenschalten, indem man ihre Ausgangskanäle als Eingangssignale eines übergeordneten Neurons verwendet (Abbildung 8.4). Findet dabei der Informationsfluss nur in einer Richtung statt, so spricht man von *feed–forward*–Netzen; dieser Typ von neuronalen Netzen wurde auf das Problem der γ/Hadron–Separation angewendet.

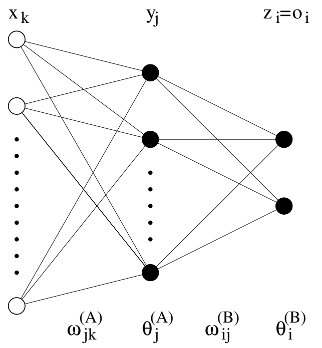


Abbildung 8.4: *Aufbau eines Multilayer–Netzes mit zwei Lagen von Knoten.*

Der Aufbau von Multilayer–Netzen ist in der Zeichnung 8.4 dargestellt. Die Werte in den Eingangskanälen werden mit x_k bezeichnet, die Werte der Knoten in der zweiten Ebene mit y_j und die Werte am Ausgang mit z_i. Die Matrizen, die die Linearkombinationen aus den Eingangskanälen bilden bzw. die Wichtung der Knoten in dem zweiten Ebene berechnen, sind $\omega_{jk}^{(A)}$ bzw. $\omega_{ij}^{(B)}$. Die Schwellen der Neuronen werden mit $\theta_j^{(A)}$ in der zweiten Ebene und mit $\theta_i^{(B)}$ im Ausgangskanal bezeichnet.

Der Ausgabewert des neuronalen Netzes an den Knoten i berechnet sich einfach mit der Response–Funktion $g(x)$ aus der Summe x der gewichteten Eingänge:

$$y_j = g\left(\sum_k \omega_{jk}^{(A)} x_k + \theta_k^{(A)}\right) \Longrightarrow z_i = o_i = g\left(\sum_j \omega_{ij}^{(B)} \cdot g\left(\sum_k \omega_{jk}^{(A)} x_k + \theta_k^{(A)}\right) + \theta_i^{(B)}\right). \quad (8.2)$$

kompliziertere Entscheidungsflächen

Je nach der Anzahl der Ebenen ist das neuronale Netz in der Lage, bestimmte Regionen aus dem Parameterraum auszuschneiden. Wie in der Zeichnung dargestellt, können einfache Neuronen nur Halbebenen ausschneiden und versagen bei dem XOR–Problem, zweilagige Netze klassifizieren alle Punkte innerhalb einer konvexen Region (Schnitt zweier Halbebenen) als zu einer Population gehörig, und dreilagige Netze bestimmen beliebige Regionen (Abbildung 8.5).

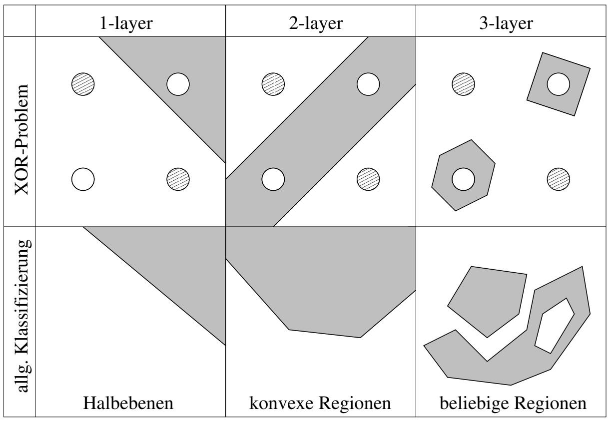


Abbildung 8.5: *Neuronale Netze verschiedener Topologie und die entsprechenden Entscheidungsflächen für das XOR–Problem und in allg. Parameterräumen.*

In dieser Arbeit wurden daher dreilagige neuronale Netze zur γ/Hadron–Separation benutzt, die auch im Vergleich zu zweilagigen Netzen eine bessere Leistung zeigten.

Darstellungstheorem von Kolmogorov

Die Klassifizierung, die ein neuronales Netz durchführt, ist eine Abbildung eines Musters (dargestellt durch den Vektor $\vec{x}$) auf die korrekte Klasse, die durch eine Zahl repräsentiert wird. Die Aussage des Theorems von Kolmogorov ist nun, dass sich jede beliebige Klassifizierung durch ein zweilagiges Netz durchführen lässt, bei dem das Muster durch die erste Lage von Verbindungen auf die Knoten der mittleren Ebene verteilt und aus dessen Werten die Klassifizierung berechnet wird. Das Theorem liefert keine Aussage über die Anzahl der Knoten in der zweiten Lage; diese muss unter Umständen sehr groß gewählt werden.

8.1.3 Minimierung des quadratischen Fehlers

Maß für den Fehler

Als Maß für den Fehler dient die quadratische Abweichung zwischen dem Wert $o_i^{(p)}$, den das Netz für das Eingabemuster p berechnet und der geforderten Ausgabe $t_i^{(p)}$, summiert über alle Muster p und alle Ausgangsknoten i und normiert auf die Anzahl der Muster N_p im Datensatz.

$$E = \frac{1}{2N_p} \sum_p \sum_i \left[o_i^{(p)} - t_i^{(p)} \right]^2 \tag{8.3}$$

Es können auch andere (positiv definite) Maße für den Fehler verwendet werden (Kullback–Fehler, cross–entropy–Fehler), die für eine bestimmte Anwendung Vorteile haben, deren Ergebnisse sich aber in den in dieser Arbeit betrachteten Problemen nicht sehr unterschieden haben.

Man wählt nun die Gewichte $\tilde{\omega}$ und die Schwellen $\vec{\theta}$ so, dass der Fehler E minimal wird.

Gradient–Descent

Der Gradient–Descent–Algorithmus ist in der Lage, die Gewichte $\tilde{\omega}$ und Schwellen $\vec{\theta}$ so einzustellen, dass sich das System in einem Minimum des quadratischen Fehlers befindet.

Als Response–Funktion kann man jede differenzierbare Funktion wählen, die von null für negative x–Werte auf eins für positive x–Werte ansteigt und die bei $x = 0$ einen linearen Bereich hat, wie zum Beispiel $g(x) = 1/\left(1 + \exp(-2x)\right)$ oder $g(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \tanh(x))$.

Die Schwellen θ_j können als Verbindung zu einem Knoten behandelt werden, der immer den Wert $y_0 \equiv -1$ annimmt: Die Matrix ω_{ij} der Gewichte wird um eine Zeile erweitert und die Werte der nullten Zeile entsprechend $\omega\prime_{0i} = \theta_i$ auf die Schwellenwerte θ_i gesetzt. Damit ergibt sich mit $y_0 \equiv -1$:

$$z_i = g\left(\sum_{j=0} \omega\prime_{ij} y_j \right) = g\left(\sum_{j=1} \omega_{ij} y_j - \theta_i \right). \tag{8.4}$$

Die Zahlen ω_{ij} und θ_i werden zu Beginn zufällig gewählt. Aus den für ein Muster p berechneten Ausgangswerten $o_i^{(p)}$ und den geforderten Werten $t_i^{(p)}$ wird der quadratische Fehler berechnet. Aus dem quadratischen Fehler werden Korrekturen $\Delta\omega_{ij}$ für die Matrizen ω_{ij} berechnet:

$$(i) \longrightarrow (j)\colon \Delta\omega_{ij}^{(A)} = -\eta \frac{\partial E}{\partial \omega_{ij}^{(A)}} \tag{8.5}$$

$$(j) \longrightarrow (k)\colon \Delta\omega_{jk}^{(B)} = -\eta \frac{\partial E}{\partial \omega_{jk}^{(B)}} \tag{8.6}$$

Mit der Kettenregel lassen sich aus dem quadratischen Fehler die Ableitungen bestimmen:

$$(i) \longrightarrow (j)\colon \frac{\partial E}{\partial \omega_{ij}^{(A)}} = \left[\left(o_i^{(p)} + t_i^{(p)} \right) \cdot g\prime \left(\sum_i \omega_{ij}^{(A)} y_j \right) \right] \cdot y_j \tag{8.7}$$

$$(j) \longrightarrow (k)\colon \frac{\partial E}{\partial \omega_{jk}^{(B)}} = \sum_i \left[\left(o_i^{(p)} + t_i^{(p)} \right) \cdot g\prime \left(\sum_j \omega_{ij}^{(A)} y_j \right) \right] \omega_{ij}^{(A)} \cdot g\prime \left(\sum_k \omega_{jk}^{(B)} x_k \right) \cdot x_k \tag{8.8}$$

Auf diese Weise gewinnt man eine induktive Vorschrift, mit der der Fehler durch alle Ebenen zurückverfolgt wird und die Gewichte angeglichen werden. Mit dem Faktor η, der als Lernquote bezeichnet wird, kann man die Geschwindigkeit des Lernens steuern. Man kann wählen, über wieviele Muster der Fehler gemittelt wird, bevor die Gewichte korrigiert werden. Man spricht dabei von einer Epoche. Mit den Korrekturen $\Delta\tilde{\omega}_t$ aus der Epoche t ergeben sich die neuen Gewichte:

$$\tilde{\omega}_{t+1} = \tilde{\omega}_t + \Delta\tilde{\omega}_t \tag{8.9}$$

Das Verfahren wird jetzt wiederholt, bis das Netz einen stationären Zustand erreicht hat und der quadratische Fehler minimiert ist.

8.1.4 Vermeidung lokaler Minima

Um zu erreichen, dass der Algorithmus nicht ein flaches lokales Minimum, sondern nach Möglichkeit ein ausgeprägtes Minimum findet, lassen sich einige Modifikationen im Gradient–Descent–Prozess anbringen, die das verhindern:

- Der Impuls–Parameter α gibt dem System zusätzliche „kinetische Energie“, so dass es erst durch ein genügend ausgeprägtes Minimum in der Potenzialfläche abgebremst wird:

$$\Delta\tilde{\omega}_{t+1} = -\eta\frac{\partial E}{\partial\tilde{\omega}} + \alpha\cdot\Delta\tilde{\omega}_t, \qquad 0 \leq \alpha < 1 \tag{8.10}$$

- Beim Langevin–Updating modifiziert man die Gradient–Descent–Vorschrift um einen Term x, der normalverteilte zufällige Werte um den Mittelwert $\langle x\rangle = 0$ und mit der Standardabweichung $\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle = \sigma^2$ annimmt. Dieses Rauschen stört den Algorithmus, der Linie mit dem größten Gradienten zu folgen und ist in der Lage, das System aus einem lokalen Minimum zu holen:

$$\Delta\tilde{\omega} = -\eta\frac{\partial E}{\partial\tilde{\omega}} + x \tag{8.11}$$

- Eine Möglichkeit, das Lernen des Netzes zu überwachen, ist die Sättigung $s = \sum_j(1-2\cdot y_i^2)$, die für jede Ebene berechnet wird. Werte für s in der Nähe von null signalisieren, dass das Netz noch kein Minimum gefunden hat, Werte von eins zeigen, dass sich ein Erfolg eingestellt hat.

8.1.5 Schwierigkeiten beim Lernen

Unter Umständen zeigt sich beim Lernprozess, dass das Netz zu keinem stabilen Zustand strebt. Folgende Fehler kommen dafür in Frage und lassen sich einfach beheben:

- **zu viele Knoten:** Ist die Anzahl der Knoten vergleichbar mit der Anzahl der Ereignisse im Datensatz, so besteht die Gefahr, dass das Netz den Datensatz als Ganzes erkennt und sich daher eine schlechte Leistung auf unbekannten Daten zeigt.

- **zu wenige Knoten:** Lokale Minima tauchen auf, wenn mehrere getrennte Klassen als eine Klasse eingestuft werden, was durch eine schlechte Darstellung des Parameterraums durch zu wenige Knoten verursacht wird.

- **falsch gewählte Lernquote η:** Eine große Rate η beschleunigt das Auffinden eines Minimums, kann aber zu einem oszillierenden Verhalten führen; bei einer Reduktion von η braucht die Minimierung des Fehlers viel Zeit. Abhilfe schafft ein sich mit der Epoche t änderndes η:

$$\eta_{t+1} = \begin{cases} \eta_t \cdot \gamma, & E_{t+1} \geq E_t \\ \eta_t \cdot \left(1 + \frac{1-\gamma}{10}\right) & \text{sonst} \end{cases} \qquad 0 \leq \gamma < 1 \tag{8.12}$$

- **falsch gewählter Impuls–Parameter α:** Ein großes α verhindert, dass das System ein flaches lokales Minimum findet und die Minimierungsfunktion die Gewichte so einstellt, daß das System zu einem genügend tiefes Minimum konvergiert. Zu große Werte für α geben dem System zuviel „kinetische Energie“, so dass das System die Minima einfach wieder verlassen kann, bei zu kleinem α kann der Lernprozess sehr lange dauern.

- **zu starkes Rauschen:** Wird das Rauschen bei der Langevin–Vorschrift zu stark gewählt und sind die Potenzialmulden zu schwach ausgeprägt, so findet der Gradient–Descent–Algorithmus kein Minimum.

8.2 Anwendung auf die γ/Hadron–Separation

Um die Leistungsfähigkeit von multifraktalen Parametern bei der Unterscheidung zwischen γ– und Hadron–induzierten Schauern bei kombinierten Schnitten auf mehrere dieser Parameter zu untersuchen, wurden drei verschiedene Ansätze gewählt:

1. Um zu sehen, wie weit die γ/Hadron–Separation allein mit Hillas–Parametern verbessert werden kann, wurde die Leistung eines Netzes mit den Hillas–Parametern *Width*, *Length*, *Concentration* und dem Logarithmus der *SIZE* als Eingangswerten untersucht.

2. Im Gegensatz dazu wurden die Trennungseigenschaften eines Netzes, dem die multifraktalen Parameter τ_2, τ_4 und τ_8, die Wavelet–Parameter β_2, β_4 und β_8 sowie der Logarithmus der *SIZE* zur Verfügung standen, betrachtet.

3. Zuletzt wurde untersucht, wie weit sich im Vergleich zu den ersten beiden Szenarien die Trennungseigenschaften verbessern lassen, indem man dem Netz sowohl Hillas– als auch multifraktale Parameter übergibt.

Da sowohl die Hillas–Parameter als auch die multifraktalen Parameter eine logarithmische Abhängigkeit von der Bildhelligkeit *SIZE* zeigen, wurde log(*SIZE*) als Eingangsparameter für das Netz gewählt.

8.2.1 Implementierung

Das Angleichen der Gewichte $\tilde{\omega}$ und Schwellen $\vec{\theta}$ wurde mit dem Programmpaket *JetNet 3.0* vorgenommen, das alle wichtigen, oben beschriebenen Funktionen unterstützt und in *FORTRAN* geschrieben ist. Die Netze wurden anschließend in dem Analyseprogramm, das in der Computersprache *C* programmiert ist, nachgebildet. Dabei fiel die unterschiedliche Numerik der Sprachen *C* und *FORTRAN* auf: Die Klassifizierungen der neuronalen Netze unterschieden sich bei gleichen Eingabewerten um bis zu vier Prozent. In den Histogrammen kann folglich bei einem Wertebereich der Netzausgabe von $0 \ldots 1$ die Größe eines Intervalls nicht kleiner als 0.04 gewählt werden.

Im Folgenden werden die wichtigsten Punkte bei der Implementierung der neuronalen Netze dargestellt. Dabei wurde für jedes Teleskop einzeln aus separaten Datensätzen jeweils ein Satz von Gewichten $\tilde{\omega}$ und Schwellen $\vec{\theta}$ abgeleitet und die Leistung der Netze für jedes Teleskop einzeln untersucht:

- **Wahl der Topologie:** Es wurden in allen drei Fällen dreilagige Netze benutzt. Wie oben beschrieben können dreilagige Netze beliebige Regionen aus dem Parameterraum ausschneiden und zeigten deshalb auch im Vergleich zu zwei– oder einlagigen Netzen die beste Leistung. Informationen konnten nur von Knoten einer Lage in die nächste, übergeordnete Lage weitergegeben werden (*feed–forward–Netze*). Die Anzahl der Knoten wurde optimiert, bis das Netz die Daten am besten klassifizieren konnte.

- **Klassifikation:** Die Klassifikation, die gefordert wurde, ist der Ausgabewert null für einen γ–induzierten Schauer und der Wert eins für einen Hadron–induzierten Schauer. Um dem Netz das Angleichen der $\tilde{\omega}$ und $\vec{\theta}$ zu erleichtern, wurden die Eingabeparameter durch ihren Maximalwert dividiert, so dass sie zwischen null und eins liegen: Anderfalls würde die erste Lage von Knoten dazu dienen, die Eingabewerte entsprechend zu normieren, was zu einem Rückgang der Leistungsfähigkeit des Netzes führt.

- **Response–Funktion** Als Response–Funktion wurden verschiedene Funktionen, die den dargestellten Anforderungen genügen, ausprobiert. Die besten Resultate wurden mit der Fermi-Funktion $g(x) = 1/\left(1+\exp(-2x)\right)$ erziehlt. Die Funktionen $g(x) = \frac{1}{2}\cdot(1+\tanh(x))$ oder $g(x) = 1/2\cdot(1+\arctan(x)/\pi)$ zeigten eine schlechtere Leistung, da sie im Vergleich langsamer von null auf eins ansteigen.

- **Maß für den Fehler:** Als Maß für die Abweichung zwischen dem Ausgangswert des neuronalen Netzes und der geforderten Klassifikation wurde der quadratische Fehler verwendet. Das *cross–entropy*–Fehlermaß zeigte eine geringfügig schlechtere Leistung.

- **Datensatz:** Der Datensatz, mit dem die Gewichte $\tilde{\omega}$ und Schwellenwerte θ_i angeglichen wurden, bestand aus 1200 Ereignissen. Der Datensatz wurde aus einem Messintervall der Beobachtung von Mkn 501 erzeugt, der einen hohen γ–Fluss zeigte und unter kleinen Zenithwinkeln aufgenommen wurde. Die Ereignisse wurden übernommen, wenn sie den Teleskoptrigger ausgelöst hatten und eine Mindesthelligkeit von 40 Photoelektronen aufwiesen. Als γ–induziert gilt ein Ereignis, wenn es sich die rekonstruierte Schauerrichtung innerhalb eines Winkels $\theta < 0.2°$ um die Quellposition befindet, als Hadron, wenn der Winkelabstand der Schauerrichtung von dem Zentrum der OFF–Position um weniger als $\theta = 0.4°$ abweicht. Die Größe der Regionen wurde so gewählt, dass sich in dem Datensatz vergleichbar viele γ– und hadronische Ereignisse befinden. Die γ–Ereignisse sind also zu zirka 30% falsch klassifizierte hadronische Ereignisse (vgl. Abbildung 5.4).

- **Verifizierung:** Mit einem analog erzeugten unabhängigen Datensatz wurde die Leistung des Netzes überprüft, um zu vermeiden, dass das Netz den Datensatz als Ganzes erkennt, und um sicherzustellen, dass der Parameterraum durch das Netz gut dargestellt wird.

- **Gradient–Descent:** Die beste Leistung zeigte das Netz, wenn seine Gewichte, die zu Beginn zufällige Werte annahmen, durch den einfachen Gradient–Descent–Algorithmus eingestellt wurden, der um einem zusätzlichen Impuls α modifiziert war. Werte für α bewegten sich zwischen 0.3 und 0.5. Da insbesondere im Fall multifraktaler Parameter die Potenzialmulden in der Energiefläche sehr flach ausgeprägt sind, wurden mit der Langevin–Vorschrift selbst mit kleinem Rauschen schlechte Erfahrungen gemacht. Nur im Falle der Hillas–Parameter war die Leistung vergleichbar, wenn auch geringfügig schlechter.

- **Anzahl der Epochen:** Änderungen an den Gewichten wurden erst vorgenommen, nachdem der quadratische Fehler über 10 Ereignisse des Datensatzes summiert wurde. Durch diese Mittelung ist der Lernprozess stabiler und Oszillationen im der Leistungsfähigkeit von Epoche zu Epoche sind unterdrückt. Der Datensatz wurde dem Netz bis zu 200 Mal präsentiert; ab der Epoche 170 zeigten sich typischerweise keine Veränderung in der Leistungsfähigkeit des Netzes mehr.
- **Lernquote:** Die Quote η wurde von Epoche zu Epoche entsprechend der Formel 8.12 verändert. Das oszillatorische Verhalten konnte bei zu großen Werten für η beobachtet werden.

8.2.2 Hillas–Parameter

Topologie des Netzwerks

Als Eingangswerte des Netzes dienen die Hillas–Parameter *Width*, *Length*, *Concentration* und der Logarithmus der *SIZE*.

Neben den vier Knoten der ersten Lage besteht das Netz aus sechs Knoten in der zweiten Lage, drei Knoten in der dritten Lage und einem Ausgangsknoten (Abbildung 8.6). Wie oben erwähnt, werden die Parameter durch ihren Maximalwert dividiert, so dass sie sich zwischen null und eins bewegen.

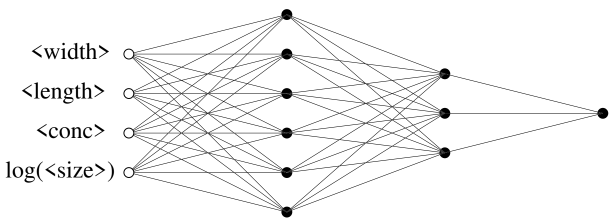


Abbildung 8.6: *Aufbau des neuronalen Netzes: Hillas-Parameter*

In der Lernphase zeigte sich die Einführung eines Impulses $\alpha = 0.5$ als zweckmäßig, die Lernquote η wurde von Epoche zu Epoche entsprechend der Formel 8.12 mit $\gamma = 0.99$ verändert. Das Netz konnte in der Lernphase auch mit größeren Impulsen α oder mit vergleichsweise starkem Langevin–Rauschen ein Minimum auffinden, was die Robustheit der Hillas–Parameter in der γ/Hadron–Separation widerspiegelt.

Ergebnisse

Die Ergebnisse des Netzes ist in der Abbildung 8.7 dargestellt: Das linke Histogramm zeigt die Klassifikationen des neuronalen Netzes für die Quellmessung (durchgezogene Linie) und für die Untergrundmessung (gebrochene Linie):
Man erkent einen Exzess bei kleinen Werten für die Ausgabe des Netzes, was den γ–Kandidaten entspricht. Bei größen Werten, d.h. Hadron–Kandidaten, sind Quell– und Untergrundmessung miteinander verträglich, was bedeutet, das das Netz hadronische Schauer richtig klassifiziert.

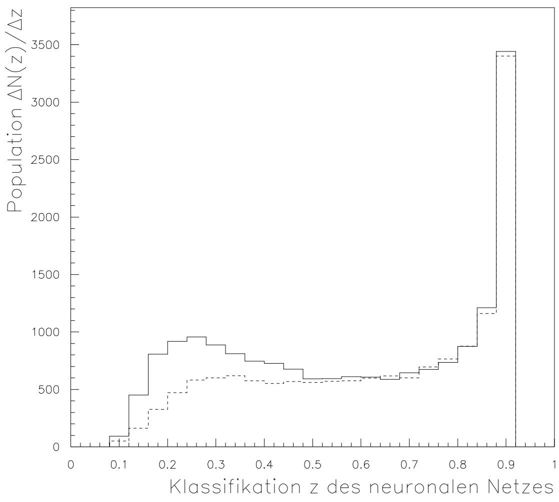


Abbildung 8.7: *Verteilung der Klassifikationen für Quell– und Untergrundmessung. Als Eingabewerte für das neuronale Netz dienen Hillas–Parameter.*

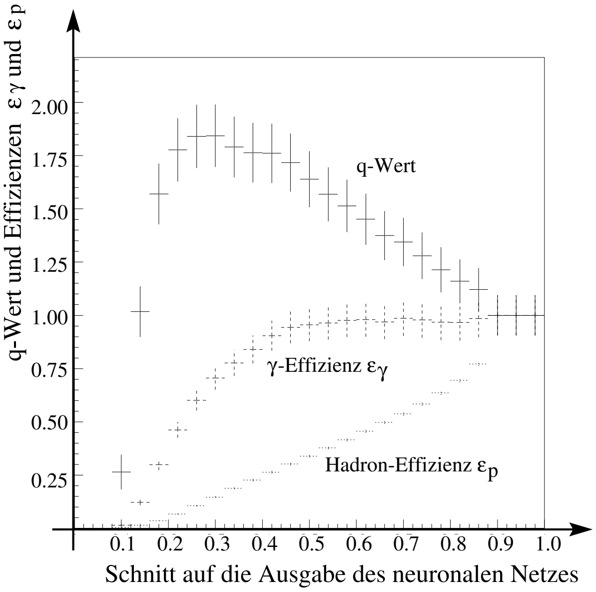


Abbildung 8.8: *Verlauf der Effizienzen ϵ_p (unten), ϵ_γ (Mitte) und des q–Faktors (oben). Die Abbildung hat die gleiche Skala wie Abbildung 8.7*

Die Abbildung 8.8 zeigt die Hadron–Effizienz ϵ_p (unten), die γ–Effizienz ϵ_γ (Mitte) und die Erhöhung der Signifikanz q (oben), in Abhängigkeit von der Schnittposition. Die x–Achsen haben auf beiden Abbildungen die gleiche Skala. Man erkennt ein relativ breites Plateau im q–Wert, was bedeutet, das die Signifikanzerhöhung nicht sehr von der Schnittposition abhängt und sich in diesem Bereich die Effizienzen linear ändern, so dass ihr Quotient konstant bleibt.

Die Tabelle 8.1 fasst die Ergebnisse zusammen. Die Schnittposition ist so gewählt, dass die Signifikanz maximal erhöht wird, die Effizienzen ϵ_p und ϵ_γ sind für diesen Schnitt angegeben. Die Ergebnisse für veschiedene Teleskope sind vergleichbar:

	Schnitt	ϵ_p	ϵ_γ	q–Wert	*ScWidth*
CT_3	$y \leq 0.38$	0.15 ± 0.004	0.70 ± 0.047	1.79 ± 0.12	1.82 ± 0.12
CT_4	$y \leq 0.30$	0.14 ± 0.004	0.71 ± 0.055	1.84 ± 0.14	2.17 ± 0.17
CT_5	$y \leq 0.30$	0.12 ± 0.004	0.57 ± 0.040	1.68 ± 0.12	1.82 ± 0.13
CT_6	$y \leq 0.34$	0.16 ± 0.005	0.68 ± 0.051	1.70 ± 0.13	1.67 ± 0.13

Tabelle 8.1: *Effizienzen und q–Faktoren für ein neuronales Netz mit Hillas–Parametern für einen Schnitt, der die Signifikanz maximal erhöht, zum Vergleich sind in der letzten Spalte die q–Faktoren für den optimalen Schnitt auf ScWidth angegeben.*

Die γ/Hadron–Separation hat sich, wie der Vergleich mit Tabelle 7.5 zeigt, nicht verbessert. Die Ursache dafür ist möglicherweise in der Kontamination des Datensatzes zu finden, der ja als γ–Ereignisse klassifizierte Hadron–Ereignisse enthält.

8.2.3 Multifraktale Parameter

Topologie des Netzwerks

Im zweiten Szenario dienen dem Netz die Parameter τ_2, τ_4, τ_8, β_2, β_4, β_8 und der Logarithmus aus der *SIZE* als Eingangsparameter. Die Ordnung der multifraktalen Parameter wurde so gewählt, dass sie möglichst gering miteinander korreliert sind. Das Netz zeigte die beste Leistung, wenn es aus sechs Knoten in der zweiten Lage und aus drei Knoten in der dritten Lage bestand (Abbildung 8.9):

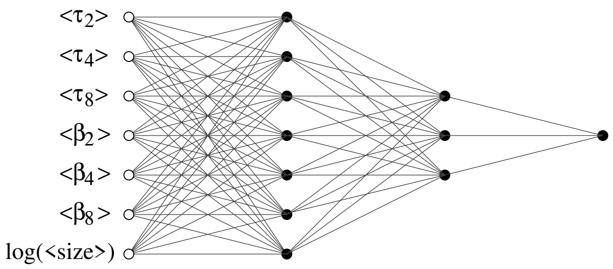


Abbildung 8.9: *Aufbau des neuronalen Netzes: multifraktale und Wavelet–Parameter*

Der Impuls α muss im Vergleich zu dem ersten Fall kleiner gewählt werden ($\alpha = 0.3 \ldots 0.4$), was den Rückschluss zulässt, dass die Potenzialmulden, die der Gradient–Descent–Algorithmus sucht, flacher sind. Das wiederum bedeutet, dass die multifraktalen Parameter schlechtere Trennungseigenschaften haben als die Hillas–Parameter. Speziell die Langevin–Vorschrift, in der Rauschen künstlich eingeführt wird, versagt in diesem Fall aus den gleichen Gründen. Die Lernquote η wurde wie im obigen Fall mit $\gamma = 0.99$ verändert.

Ergebnisse

Die Ergebnisse im Falle multifraktaler Parameter sind ganz analog zu den Hillas–Parametern:

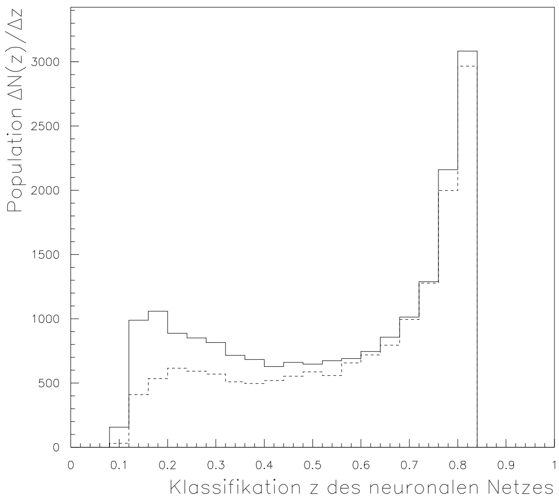


Abbildung 8.10: *Klassifikation der Schauerbilder durch ein neuronales Netz mit den multifraktalen Parametern als Eingabewerte.*

Wie aus der Tabelle 8.2 ersichtlich, sind die q–Werte im Falle multifraktaler Parameter um zirka 0.1 kleiner als bei den Hillas–Parametern. Die Ursache hierfür sind die kleineren γ–Effizienzen ϵ_γ, während sich die Hadron–Effizienzen ϵ_p nicht sehr unterscheiden:

	Schnitt	ϵ_p	ϵ_γ	q–Wert	*ScWidth*
CT_3	$y \leq 0.34$	0.12 ± 0.003	0.54 ± 0.037	1.59 ± 0.11	1.82 ± 0.12
CT_4	$y \leq 0.26$	0.09 ± 0.004	0.48 ± 0.039	1.58 ± 0.13	2.17 ± 0.17
CT_5	$y \leq 0.18$	0.06 ± 0.003	0.38 ± 0.038	1.52 ± 0.12	1.82 ± 0.13
CT_6	$y \leq 0.22$	0.12 ± 0.004	0.51 ± 0.040	1.46 ± 0.12	1.67 ± 0.13

Tabelle 8.2: *Effizienzen und q–Faktoren für das neuronale Netz mit multifraktalen Parametern.*

Die schlechtere Leistung des Netzes spiegelt die im Vergleich zu den Hillas–Parametern schlechtere Trennungseigenschaft der multifraktalen Parameter wider. Dafür sprechen auch die Schwierigkeiten mit großen Impulsen α und Langevin–Rauschen, die ein Indiz für schwach ausgeprägte Potenzialmulden sind.

Die q–Faktoren haben sich im Vergleich zu Schnitten auf einzelne multifraktale Parameter um einen Faktor von 1.2 verbessert. Der Ansatz, mittels neuronaler Netze die γ/Hadron–Separation zu verbessern, ist also sehr vielversprechend.

8.2.4 Hillas-Parameter und multifraktale Parameter

Topologie des Netzwerks

In dem letzten Szenario wurden dem Netz sowohl Hillas– als auch multifraktale Parameter übergeben. Die Leistungsfähigkeit war am größten, wenn die zweite Lage aus zwölf und die dritte Lage aus sechs Knoten zusammengesetzt war (Abbildung 8.11):

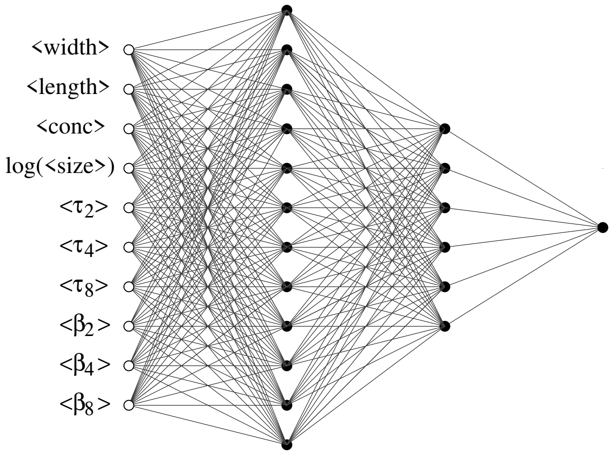


Abbildung 8.11: *Aufbau des neuronalen Netzes: alle Parameter*

Beim Angleichen der $\tilde{\omega}$ und der $\vec{\theta}$ zeigte ein relativ großer Impuls von $\alpha = 0.4$ die beste Leistung, allerdings war auch die Wahl von kleineren Werten für α möglich, was nur zu einer kleinen Minderung der Trennungseigenschaften des Netzes führt. Die Langevin–Vorschrift konnte im Gegensatz zu dem obigen Fall erfolgreich verwendet werden, allerdings war die Leistung schlechter verglichen mit dem einfachen Gradient–Descent–Algorithmus.

Ergebnisse

Die beste Leistung wurde mit diesem Netz erziehlt. Die beiden Abbildungen 8.12 zeigen wieder die Verteilung der Klassifikationen für Quell– und Untergrundmessung und die Effizienzen bzw. q–Werte in Abhängigkeit der Schnittposition:
Wesentlich ausgeprägter als in den ersten beiden Fällen zeigte das Netz die interessante Eigenschaft, trotz der fälschlich als γ–Kandidaten klassifizierten hadronischen Ereignisse in dem Datensatz, mit dem das Einstellen der Gewichte und Schwellen vorgenommen wurde, hadronische Ereignisse richtig zu klasssifizieren: Die Verteilung der Ereignisse der Untergrundmessung, die nur hadronische Ereignisse enthält, fällt zu kleinen Werten hin ab.

Im Gegensatz dazu verläuft die Verteilung der hadronischen Ereignisse der Untergrundmessung in den ersten beiden Szenarien flach oder zeigt im Falle multifraktaler Parameter eine leichte Erhöhung parallel mit dem Maximum der Verteilung, das in der Quellmessung durch die γ–Kandidaten verursacht wird.
In der Tabelle 8.3 sind die Trennungseigenschaften des Netzes zusammengefasst. Die q–Werte liegen um bis zu 0.3 höher als im Fall der Hillas–Parameter, was trotz kleinerer γ–Effizienzen ϵ_γ

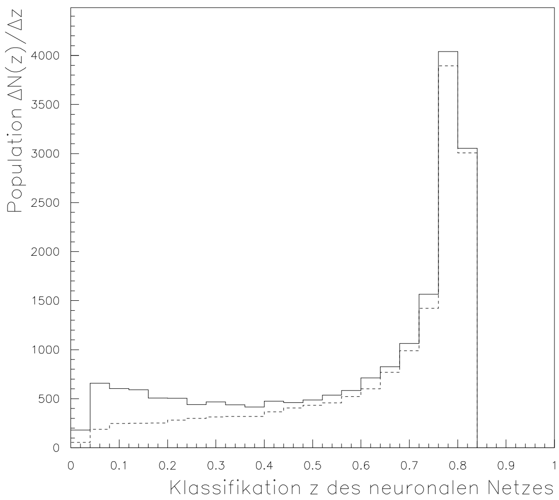


Abbildung 8.12: *Optimum der Klassifikation durch ein neuronales Netz, dem sowohl die klassischen Hillas–Parameter als auch multifraktale Parameter zur Verfügung stehen.*

	Schnitt	ϵ_p	ϵ_γ	q–Wert	*ScWidth*
CT_3	$y \leq 0.26$	0.07 ± 0.003	0.54 ± 0.035	2.01 ± 0.14	1.82 ± 0.12
CT_4	$y \leq 0.18$	0.11 ± 0.004	0.63 ± 0.049	1.93 ± 0.15	2.17 ± 0.17
CT_5	$y \leq 0.22$	0.08 ± 0.003	0.55 ± 0.037	1.91 ± 0.13	1.82 ± 0.13
CT_6	$y \leq 0.19$	0.09 ± 0.004	0.54 ± 0.041	1.77 ± 0.14	1.67 ± 0.13

Tabelle 8.3: *Effizienzen und q–Faktoren für ein neuronales Netz mit Hillas–Parametern als auch multifraktalen Parametern als Eingangswerte. Zum Vergleich ist in der letzten Spalte der q–Faktoren bei einem optimalen Schnitt auf ScWidth angegeben.*

durch die im Vergleich kleineren Hadron–Effizienzen ϵ_p verursacht wird.

Die Trennungseigenschaften lassen sich also durch die Verwendung eines Netzes, dem sowohl Hillas– wie auch multifraktale Parameter zur Verfügung stehen, marginal verbessern.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

Das Čerenkov–Teleskopsystem der HEGRA–Kollaboration ist in der Lage, γ–induzierte Luftschauer ab einer Energie von zirka 0.5 TeV zu detektieren und deren Herkunftsort stereoskopisch zu rekonstruieren. Eine Rejektion des hadronischen Untergrunds wird durch Schnitte auf Hillas–Parameter, die die geometrischen Eigenschaften der Schauerbilder beschreiben, erreicht.

Eine alternative Parametrisierung, die die Selbstähnlichkeit der Schauer und der Verteilung des Čerenkov–Lichts quantifiziert, stellt die multifraktale Analyse zur Verfügung. Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde diese Analysemethode auf die Čerenkov–Bilder, welche die HEGRA–Kamera registriert, angewendet und multifraktale Parameter aus diesen Bildern abgeleitet. Folgende Ergebnisse wurden dabei erziehlt:

1. Die unterschiedliche Entwicklung von Schauern, die von γ–Quanten oder hadronischen Primärteilchen ausgelöst wurden, spiegelt sich in den multifraktalen Parametern wider. Im Vergleich zeigen die multifraktalen Parameter Trennungseigenschaften, die in der Leistung dem Hillas–Parameter *Concentration* gleichkommen.

2. Faktorielle Parameter, die analog zu den multifraktalen Parametern berechnet werden, mit dem Unterschied, dass Regionen, die einen Großteil der Amplitude tragen im Vergleich weniger stark in die Berechnung eingehen, zeigen den multifraktalen Parametern ähnliche Trennungseigenschaften.

3. Mit der multifraktalen Analyse verwandt ist die Wavelet–Analyse, die nicht die Amplitudenverteilung selbst, sondern deren Ableitung auf unterschiedlichen Längenskalen beschreibt. Die für die Verteilung des Čerenkov–Lichts in der HEGRA–Kamera berechneten Wavelet–Parameter zeigen vergleichsweise schlechte Trennungseigenschaften.

4. Der Einfluß der Lage und der Ausrichtung der Schauerbilder auf die multifraktalen bzw. Wavelet–Parameter wurde untersucht und konnte erklärt werden. Ein Ansatz, um diesen *Aliasing*–Effekt zu umgehen, ist ein Gitter von Pixelgruppen, das jeweils auf den Schwerpunkt des Schauerbildes oder das Pixel mit der größten Amplitude zentriert wird.
   Der Zusammenhang zwischen der Gesamthelligkeit der Bilder und den multifraktalen Parametern konnte in einem einfachen Modell beschieben werden.

5. Kombinierte Schnitte auf Hillas– und multifraktale Parameter sind wegen der engen Korrelation der Parameter schwierig. Ein alternativer Ansatz, mittels neuronaler Netze kompli-

ziertere Schnitte auszuführen, erwies sich als erfolgreich und hat Potenzial, die γ/Hadron–Separation weiter zu verbessern.
Da das neuronale Netz durch die Kontamination des Datensatzes mit falsch klassifizierten Ereignissen in seiner Leistungsfähigkeit beschränkt bleibt, ist zu erwägen, ob man das Anpassen der Gewichte und Schwellen mit Monte–Carlo–generierten Daten vornimmt.

Es ist sicherlich interessant, die Analysemethode auf Bilder der H.E.S.S.–Kamera anzuwenden, da diese eine größere Granularität als die HEGRA–Kamera aufweist und die Verteilung des Čerenkov–Lichts auf kürzeren Längenskalen abtastet. Das Analyseprogramm sieht diese Möglichkeit vor.

Eine weitere mögliche Anwendung der multifraktalen Analyse ist die Unterscheidung verschiedener Elementgruppen in der hadronischen Komponente der kosmischen Strahlung und die Bestimmung ihrer chemischen Zusammensetzung.

Literaturverzeichnis

[AHA90] **A. Aharony**, *Multifractals in Physics: Successes, Dangers and Challenges*, Physica A 168 (1990) 479-489

[AHA91] **F.A. Aharonian, A.A. Chilingarian, A.K. Konopelko, A.V. Plyasheshnikov**, *A Multidimensional Analysis of the Čerenkov Images of Air Showers Induced by Very High Energy γ-Rays and Protons*, NIM A302(1991) 552-528

[AHA99a] **F.A. Aharonian, A.M. Atoyan**, *On the Origin of TeV Radiation of SN 1006*, preprint astro-ph/9911158[1]

[AHA99b] **F.A. Aharonian et al.**, *The Time Averaged TeV Energy Spectrum of Mkn 501 of the Extraordinary 1997 Outburst as Measured with the Stereoscopic Čerenkov–System of HEGRA*, Astronomy and Astrophysics, 439, 11 (1999)

[AHA99c] **F.A. Aharonian et al.**, *Observations of Mkn 421 during 1997 and 1998 in the Energy Range above 500 GeV with the HEGRA stereoscopic Čerenkov–Teleskope System*, Astronomy and Astrophysics, 350, 757 (1999)

[ALL75] **O.K. Allkofer**, *Introduction to Cosmic Radiation*, Verlag Karl Thienig, München, 1975

[BAB92] **W.S. Babbage, L.F. Thompson**, *The Use of Neural Networks in γ–π^0 Discrimination*, NIM A330 (1993) 482-486

[BAC93] **E. Bacry, J.F. Muzy, A. Arneodo**, *Singularity Spectrum of Fractal Signals from Wavelet Analysis: Exact Results*, J. Stat. Phys. 70 (1993) 635

[BEA92] **R. Beale, T. Jackson**, *Neural Computing: An Introduction*, IOP, London, 1992

[BED97] **W. Bednarek, R.J. Protheroe**, *γ–Rays and Neurinos from the Crab–Nebula Produced by Pulsar Accelerated Nuclei*, Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 2616

[BIA86] **A. Bialas, R. Peschanski**, *Moments of Rapidity Distributions as a Measure of Short-Range Fluctuations in High-Energy Collisions*, Nuc. Phys. B273 (1986) 703-718

[BIA88] **A. Bialas, R. Peschanski**, *Intermittency in Multiparticle Production at High Energy*, Nuc. Phys. B308 (1988) 857-867

[BLA78] **R.D. Blandford, J.P. Oistriker**, *Particle Acceleration by Astrophysical Shocks*, Astrophysical Journal, 221: L29-L32, 1978

[1] Verweise auf Vorabdrucke beziehen sich auf den elektronischen Preprint–Service, verfügbar unter http://arXiv.org

[CHI90] **C. Chiu, R.C. Hwa**, *Multifractal Structure of Multiparticle Production in Branching Models*, Phys. Rev. D 43 (1990) 100

[DAU97] **A. Daum et al.**, *First Results on the Performance of the HEGRA IACT Array*, Astroparticle Physics 8 (1997) 1-11

[DAV57] **J. Davies, E. Cotton**, Journal of Solar Energy, Science and Engineering 1, 16, 1957

[DRU94] **L.O'C. Drury, F.A. Aharonian, H.J. Völk**, *The γ–Ray Visibility of Supernova Remnants. A Test of Cosmic Ray Origin*, Astron. Astrophys. 287, 959-971 (1994)

[ESP96] **J.A. Esposito, S.D. Hunter, G. Kanbach, P.Sreekumar**, *EGRET Observations of Radio-Bright Supernova Remnants*, Astrophysical Journal, 461: 820-827, 1996

[FED88] **J. Feder**, *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988

[FEG97] **D.J. Fegan**, *γ/Hadron Separation at TeV Energies*, J.Phys.G 23 (1997) 1013-1060

[GAI90] **T. Gaisser**, *Cosmic Rays and Particle Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990

[HAL86] **T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, B.I. Shraiman**, *Fractal Measures and their Singularities: The Characterization of Strange Sets*, Phys. Rev. A 33 (1986) 1141

[HAU96a] **A. Haungs**, *Teilchenverteilungen im Zentrum hochenergetischer ausgedehnter Luftschauer als Informationsquelle fuer die Natur des primären Teilchens*, Doktorarbeit FZKA–5845, Forschungszentrum Karlsruhe, Karlsruhe, 1996

[HAU96b] **A. Haungs**, *Features of the Lateral Particle Distribution on the Core of High–Energy EAS from a Multifractal Moments Analysis*, NIM A372 (1996) 515

[HAU99] **A. Haungs, A.K. Razdan, C.L. Bhat, R.C. Rannot, H. Rebel**, *First Results on Characterization of Čerenkov Images through Combined Use of Hillas, Fractal and Wavelet–Parameters*, Astroparticle Physics 5 (1999) 145

[HEM98] **M. Hemberger**, *Untersuchung der primären geladenen kosmischen Strahlung oberhalb 1 TeV mit den Methoden der abbildenden Čerenkov–Technik*, Doktorarbeit MPI H-V 19-1998, Max–Planck–Institut für Kernphysik, Heidelberg, 1998

[HER91] **J. Hertz, A. Krogh, R.G. Palmer**, *Introduction to the Theory of Neural Computation*, Addison-Wesley, Reading, 1991

[HES98] **M. Hess**, *Untersuchung der Struktur von Luftschauern und Suche nach TeV–γ–Strahlung mit den Methoden der abbildenden atmosphärischen Čerenkov–Technik*, Doktorarbeit, Max–Planck–Institut für Kernphysik, Heidelberg, 1998

[HIL85] **A.M. Hillas**, *Čerenkov Light Images of Extensive Air Showers Produced by Primary γ–Rays and by Nuclei*, Proc. 19th ICRC (La Jolla) 3 445

[HIL98] **A.M. Hillas et al.**, *The Spectrum of TeV γ–Rays from the Crab Nebula*, Astrophysical Journal, 503: 744-759, 1998

[HIL99] **A.M. Hillas, M. West**, *Possible Improvements to the Sensitivity of Detection of TeV γ-Ray Sources Using the Čerenkov Imaging Technique*, Proc. 22nd ICRC (Dublin) 1 472-475

[HWA89] **R.C. Hwa**, *Fractal Measures in Multiparticle Production*, Phys. Rev. D 41 (1989) 1456

[JAC82] **J. Jackson**, *Classical Electrodynamics*, de Gruyter, New York, 1982

[JAE89] **B. Jähne**, *Digitale Bildverarbeitung*, Springer, Berlin, 1989

[JAG95] **O.C. de Jager, A.K. Harding, P.F. Michelson, H.I.Nel, P.L. Nolan, P. Sreekumar, D.J. Thompson**, *γ–Ray Observations of the Crab Nebula: A Study of the Synchro–Compton Spectrum*, Astrophysical Journal, 457: 253-266, 1996

[JEL58] **J. Jelley**, *Čerenkov–Radiation ans its Application*, Pergamon, London 1958

[KAN95] **J.W. Kantelhardt, H.E. Roman, M. Greiner**, *Discrete Wavelet Approach to Multifractality*, Physica A 220 (1995) 219-238

[KAR96] **H. Karttunen**, *Fundamental Astronomy*, Springer, Heidelberg, 1996

[KIR94] **J.G. Kirk**, *Particle Acceleration*, Lecture notes, Les Diablerets, 1994

[KEM99] **A.K. Kembhavi, J.V. Narlikar**, *Quasars and Active Galactic Nuclei – an Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999

[KEM94] **J. Kempa**, *Fractal and Factorial Studies of Electron Density Distributions in Extensive Air Showers*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 20 (1994) 215-222

[KOE98] **C. Köhler**, *Entwicklung einer Methode zur Bestimmung der Energie kosmischer TeV-γ-Quanten mit den Čerenkov–Teleskopen der HEGRA–Kollaboration – das Energiespektrum der aktiven Galaxie Mrk 501*, Doktorarbeit MPI H-V 42-1998, Max–Planck–Institut für Kernphysik, Heidelberg, 1998

[KOH96] **A. Kohnle et al.**, *Stereoscopic Imaging of Air Showers with the First Two HEGRA–Čerenkov–Telescopes*, Astroparticle Physics 5 (1998) 119-131

[KRA97] **D. Kranich**, *Verbesserung der γ/Hadron–Trennung in der Hochenergie γ–Astronomie mit Čerenkov–Teleskopen*, Diplomarbeit MPI-PHE/97-11, Max–Planck–Institut für Physik, München, 1997

[KRA99] **H. Krawczynski, P.S. Coppi, T. Maccarone, F.A. Aharonian**, *X–ray/TeV–γ–Ray Observations of Several Strong Flares of Mkn 501 during 1997 and Implications*, preprint astro-ph/9911224

[LI83] **T.P. Li, Y.Q. Ma**, *Analysis Methods for Results in γ–Ray Astronomy*, Astrophysical Journal, 272: 317-324, 1983

[LOE91] **L.Lönnblad, C. Peterson, T. Rögnvaldsson**, *Pattern Recognition in High Energy Physics with Artificial Neural Networks*, Comp. Phys. Comm. 70 (1992) 167-182

[LON81] **M.S. Longair**, *High Energy Astrophysics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981

[MUZ93] **J.F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo**, *Multifractal Formalism for Fractal Signals: The Structure Function Approach Versus the Wavelet–Transform Modulus–Maxima Method*, Phys. Rev. E 47 (1993) 875

[OTT94] **E. Ott, T. Sauer, J.A. Yorke**, *Coping With Chaos – Analysis of Chaotic Data and the Exploration of Chaotic Systems*, Wiley, New York, 1994

[PDG90] **Particle Data Group**, *Review of Particle Properties*, Physics Letters B 239(1990)

[PET93] **C. Peterson, T. Rögnvaldsson, L. Lönnblad**, *JETNET 3.0 – A Versatile Atrificial Neural Network Package*, LU TP 913-29 (1993), Universität Lund, 1993

[PET97] **B.M. Peterson**, *An Introduction to Active Galactic Nuclei*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997

[PIE85] **L. Pietronero, E. Tosatti**, *Fractals in Physics*, Proceedings of the Sixth Trieste International Symposium on Fractals in Physics, North–Holland, Amsterdam, 1986

[POH98] **M. Pohl, J.A. Esposito**, *Electron Acceleration in Supernova Remnants and Diffuse γ–Rays above 1 TeV*, Astrophysical Journal, 461: 820-827, 1998

[PUE96] **G. Pühlhofer**, *Aufbau der Steuerung für das Čerenkov–Teleskop 3 des HEGRA–Teleskop–Systems*, Diplomarbeit, Max–Planck–Institut für Kernphysik, Heidelberg, 1996

[RAM86] **P. Ramana-Murthy, A.Wolfendale**, *γ–Ray Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986

[REY93] **P.T. Reynolds et al.**, *Survey of Candidate γ–Ray Sources at TeV Energies Using a High–Resolution Čerenkov Imaging System*, Astrophysical Journal, 404: 206-218, 1993

[REY95] **P.T. Reynolds, D.J. Fegan**, *Neural Network Classification of TeV γ–Ray Images*, Astroparticle Physics 3 (1995) 137-150

[ROE92] **W. Roedel**, *Physik unserer Umwelt: Die Atmosphäre*, Springer, Berlin, 1992

[STI93] **M. Stickel, J.W. Fried, H. Kühr**, *The Complete Sample of 1 Jy BL–Lac–Objects*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 98, 393-442 (1993)

[STR84] **N. Straumann**, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Springer, Heidelberg, 1984

[ULR97] **M. Ulrich, A. Daum, G. Hermann, W. Hofmann**, *An Improved Technique of Image Analysis for IACT's and IACT-Systems*, preprint astro-ph/9708003

[UNS99] **A. Unsöld, B. Baschek**, *Der Neue Kosmos – Einführung in die Astronomie und Astrophysik*, Springer, Heidelberg, 1999

[WEE89] **T.C. Weekes et al.**, *Observation of the Crab–Nebula Using the Atmospheric Čerenkov Imaging Technique*, Astrophysical Journal, 342: 379-395, 1989

[WIE94] **B. Wiebel**, *Chemical Composition in High Energy Cosmic Rays*, Universität Wuppertal, preprint WUB 94–08, 1994

[WIE98] **B. Wiebel–Sooth, P.L. Biermann**, *Landolt–Boernstein Numerical Data and Functional Relationships*, New Series Vol. VI 3C, Springer, 1998

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei allen Mitgliedern der CT–Gruppe des Max–Planck–Instituts für Kernphysik in Heidelberg bedanken, die durch ihre Freundlichkeit und Hilfsbereitschaft zum Gelingen meiner Diplomarbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. W. Hofmann für die interessante Aufgabenstellung und die Betreuung der Arbeit, vor allem dafür, dass er die richtigen kritischen Fragen stellte, wenn sich etwas in die falsche Richtung zu entwickeln begann.

Dr. M. Panter und Dr. G. Hermann möchte ich für das Korrekturlesen meiner Arbeit danken, und dafür, dass sie mir Details des Experiments erklären konnten, die ich lange nicht verstanden habe.

Bei Dipl. Phys. H. Lampeitl und Dr. M. Hemberger möchte ich mich bedanken, weil sie sich sehr für meine Ergebnisse interessiert haben und ich ihnen viele gute Anregungen verdanke.

Dipl. Phys. I. Jung und Dipl. Phys. O. Bolz danke ich für ihre Unterstützung und die nette Arbeitsatmosphäre.

Frau J. Suppanz gilt mein Dank für ihre Kompetenz und Hilfbereitschaft bei organisatorischen und verwaltungstechnischen Problemen.

Dr. R. Strichirsch und der Studienstiftung danke ich für das mir gewährte Vertrauen.

Vor allem möche ich allerdings meinen Eltern danken, die durch ihre Unterstützung mein Studium ermöglicht haben und mich so oft aufgemuntert haben, wenn ich den Kopf hängen ließ.

Erklärung

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 06.Juni.2000 ....

(Unterschrift)