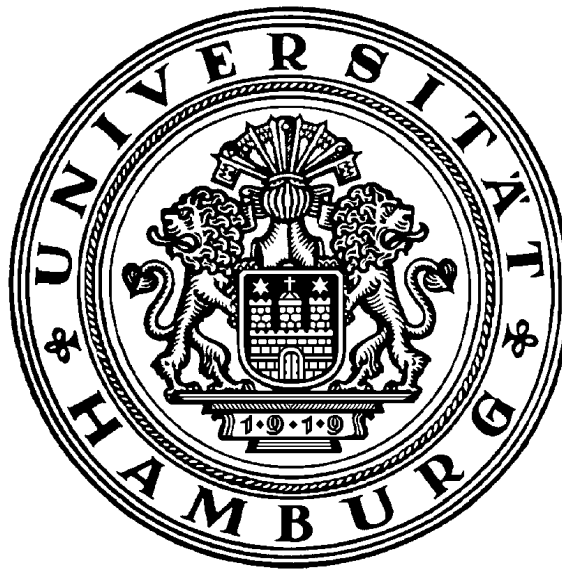


Physikalisches Praktikum für
Studierende der Medizin, Zahnmedizin und
Biochemie / Molekularbiologie

Praktikumsbegleitseminar

MILLENNIUMSAUSGABE
:-)



Universität Hamburg
Fachbereich Physik

(ab WS 2005/06)

Inhalt

1. ALLGEMEINES	4
Rechenarten	4
Funktionen	5
2. ENTSTEHUNG PHYSIKALISCHER GLEICHUNGEN	5
Vorbemerkung zum Umgang mit Gleichungen	5
Physikalische Größen	5
Einheiten und Dimensionen	6
Formeln	7
3. EINIGE PHYSIKALISCHE GRÖßEN UND FORMELN	8
Definition physikalischer Größen und ihre Einheiten	8
Formelwahl zu Themengebieten der Physik	9
4. UMGANG MIT MESSWERTEN	10
Erhebung / Auswertung von Messwerten	10
Mittelwerte	10
Sammlung von Messwerten in Tabellen	11
Darstellung von Messwerten durch Graphen	13
Endergebnisse aus Tabellen und Graphen, Standardabweichung	15
5. VERWENDUNG DEKADISCHLOGARITHMISCHER SKALEN	16
Skalierung	16
Messwerte eintragen	17
6. FUNKTIONEN AUF VERSCHIEDENEN NETZEN	18
Einfache Potenz- und Exponentialfunktionen	18
Beispiele aus den Praktikumsinhalten	20
7. ZUR GEOMETRISCHEN OPTIK	22
8. ZUR ELEKTROTECHNIK	23
Wichtige Größen	23
Praktische Hinweise	24
9. ÜBUNGEN ZUM UMGANG MIT GLEICHUNGEN	27
1. Rechenstufe, 2. Rechenstufe	27
3. Rechenstufe	30
Potenzen und Wurzeln	30
Logarithmen	32
10. ZUSATZÜBUNGEN	35
Der Dreisatz	35
Vorsätze	36
BLITZ – BLÄTTER	37
Erkennen physikalischer Größen aus ihren Einheiten	37
Physikalische Einheiten analysieren und Umrechnen	38
Übungen mit dem Taschenrechner	39
Statistische Funktionen	39
Gewöhnung an die Logarithmenrechnung	40
Gewöhnung an die e-Funktionen	42
Funktionen aus dem Praktikum	44
Übungen zur optischen Bildkonstruktion	46
Logarithmische Ordinaten skalieren	48
Logarithmische Werte eintragen	49
11. EINIGE VORSCHLÄGE ZU DEN KLAUSUREN	50
12. LÖSUNGEN	51
GRÖßEN UND FORMELN AUS DEN VERSUCHEN	58

Vorbemerkung

Im vorliegenden Skript zum Praktikumsbegleitseminar sind einige Themen behandelt, die Ihnen zu Beginn des Physikalischen Praktikums einen kurzen thematischen Überblick verschaffen können und Ihnen damit Gelegenheit geben, sich während des Semesters mit jenen Sachverhalten kontinuierlich zu beschäftigen, bei denen noch Unsicherheiten bestehen. Dazu können z. B. Zusammenhänge zwischen mathematischer und grafischer Darstellung von Potenz- und Exponentialfunktionen gehören, oder die in den Zusatzübungen enthaltenen Aufgaben zu einigen Themen der Inhalte des Praktikums.

Die kurzen Übungen ab Seite 27 sollen dazu dienen, sich an die Darstellung und Bedeutung bestimmter Sachverhalte zu gewöhnen, um die nötige Sicherheit im Umgang mit einfachen physikalischen Gesetzmäßigkeiten zu erlangen. Lösungen, sofern sie den laufenden Text unübersichtlich gemacht hätten, sind an das Ende des Skriptes verlegt.

Die Themenwahl wurde durch Frau Dr. med. D. Staiger geprüft und deren inhaltliche Korrektur hat Frau Dipl.-Phys. U. Priebe dankenswerter Weise übernommen.

Begleitend zum Praktikum und zur Vorbereitung auf die Klausuren gibt es weitere unterstützende Blätter:

- **Aufgabenbeispiele zur Vorbereitung auf die Klausuren**
- **Alte Klausuren (als Ergänzung zu empfehlen)**
- **Vorlesungsbegleitende Skripte: <http://wwwiexp.desy.de/users/uwe.holm>**

1. Allgemeines

Mathematische Ausdrücke und Zahlen:

$$\Delta T = T_2 - T_1 \quad \sqrt[n]{x} \equiv x^{\frac{1}{n}} \quad \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + \dots + x_n \quad \prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \quad \frac{dx}{dy}; \quad \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$$

Rationale Zahlen : Ganze und gebrochene Zahlen, die durch Brüche aus ganzen Zahlen dargestellt werden können (m/n , wobei m, n ganze Zahlen sind).

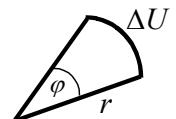
Irrational. Zahlen : Sie können nicht durch Brüche aus ganzen Zahlen ausgedrückt werden. Irrationale (=kein Verhältnis habende) Zahlen, stellen Längen von Strecken dar, die nicht durch die Länge einer Maßstabseinheit ausgedrückt werden kann; z. B. die Diagonale eines Quadrates, wenn die Seiten die Maßstabseinheiten sind. Beispiele: $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; etc.

Reelle Zahlen : Die Gesamtheit rationaler und irrationaler Zahlen, also alle „gebräuchlichen“.

Transzendente Z. : Sie sind irrationale Z., die nicht Wurzeln algebraischer Gleichungen sind. (e, π)

Definition der Winkelgröße als Bogenstück am Einheitskreis:

Die Größe eines Winkels ist definiert als das Verhältnis des zum Winkel gehörigen Kreisbogens zum Radius des Kreises: $\varphi = \Delta U / r$. Das Verhältnis des Umfanges U zum Durchmesser d eines Kreises U/d ist konstant und für jeden Kreis dasselbe:



$$\pi = \frac{U}{d} = \frac{U}{2r} \Rightarrow U = 2\pi r \quad \text{mit } r = 1 \cdot \text{Längeneinheit (in z. B. m) für den Einheitskreis}$$

Demnach ist 2π der Vollwinkel. (Einheitskreis = Kreis mit dem Radius Eins einer beliebigen Maßeinheit.) Der so definierte Winkel im Bogenmaß hat die „Einheit“ Radiant (rad). Wird Grad ($^\circ$) als Einheit verwendet, muss umgerechnet werden. Per Definition gilt dabei für den Vollwinkel $2\pi \text{ rad} \equiv 360^\circ$:

$$\text{Radiant} \Leftrightarrow \text{Grad:} \quad 1 \text{ rad} \equiv \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57,3^\circ \quad 1^\circ = 60' = 3600'' \text{ (60 Bogenminuten, 3600 Bogensekunden)}$$

Einige populäre Formeln, Größen und Zahlen:

$$\text{Kreisumfang / -fläche: } U = 2 \cdot \pi \cdot r \quad / \quad A = \pi \cdot r^2 \quad \text{Kugeloberfläche / -volumen: } O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \quad / \quad V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$\pi \approx 3,14 \quad e \approx 2,7 \quad \sqrt{2} \approx \pm 1,4 \quad \lg 2 \approx 0,3 \quad \lg e \approx 0,4343 \quad \ln 2 \approx 0,7$$

Rechenarten

Rechenstufe	Rechenart	Umkehrung	Beispiel	Umkehrung/en	Bemerkung
1.	+	−	$a = b + c$	$b = a - c$ $c = a - b$	eine Umkehrung: Addieren → Subtrahieren
2.	$\times (\bullet)$	\div	$a = b \cdot c$	$b = a / c$ $c = a / b$	eine Umkehrung: Multiplizieren → Dividieren
3.	a^x	$\sqrt[q]{x}$ $\log_a x$	$a = b^c$	$b = \sqrt[q]{a}$ $c = \log_b a$	zwei Umkehrungen: Potenzieren → Logarithmieren, Radizieren

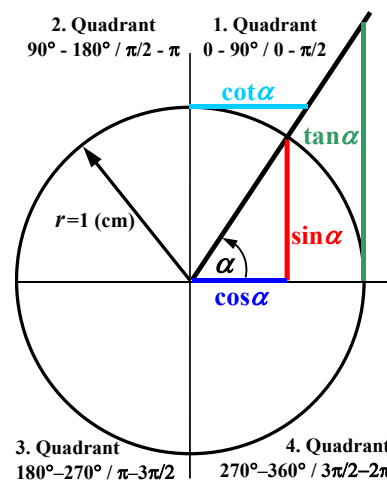
Funktionen

Definition: Eine Funktion liegt vor, wenn einem Wert des Argumentes x aus dem Definitionsbereich der Funktion nur ein y -Wert aus dem Wertebereich zugeordnet wird. Ein *Definitionsbereich* bestimmt die Menge der Zahlen, für die eine Funktion definiert ist. Ein *Wertebereich* bestimmt die Menge der möglichen Funktionswerte. Beispiele: $y = \pm\sqrt{x}$ ist keine Funktion, ebenso wenig $y = \pm\sqrt[4]{x}$, wohl aber $y = \sqrt[3]{x}$.

Funktionsarten: Arithmetische F.: (algebraische)
 Irrationale F.: Radizieren ist notwendiger Teil der Lösung: $y = \sqrt{x^3 - 1}$.
 Transzendente F.: Funktionen mit $y = \sin \alpha$, $y = \tan \alpha$, $y = \lg x$, $y = \ln x$
 Potenzfunktion: Die unabhängige Variable ist potenziert: $y = x^4$, $y = ax^2$
 Exponentialfunktion: Die unabhängige Variable ist die Potenz: $y = a \cdot e^x$, $y = 10^{a \cdot x}$

Winkelfunktionen:

- Die Winkelfunktionen können als Strecken am Einheitskreis dargestellt werden (s. Skizze→)
- Wichtige Wertebereiche: \sin, \cos : $(-1 \dots 1)$; \tan, \cot : $(-\infty \dots \infty)$ (also ist z. B. $\sin \alpha = 1,5$ unsinnig)
- Die Projektion auf kartesische Koordinaten (α auf der Abszisse, Streckenlänge auf der Ordinate) ergibt die bekannten Kurven, z. B. die Sinuskurve.
- Winkelfunktionen haben als Streckenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck die Einheit Eins, werden sie mathematisch definiert haben sie nicht einmal diese Einheit.



2. Entstehung physikalischer Gleichungen

Vorbemerkung zum Umgang mit Gleichungen

- Beim „Umstellen“ bzw. Auflösen von Gleichungen nach einer Größe ist die Rangfolge der den Rechenstufen zugehörigen Rechenarten zu beachten. Angewendet werden Rechenarten der dritten Rechenstufe vor denen der zweiten, diejenigen der zweiten vor denen der ersten.
 - Potenzrechnung vor Punktrechnung (Produkte werden geklammert)
 - Punktrechnung vor Strichrechnung (Summen werden geklammert)
- Durch Klammern wird eine Rechenstufe zusammengefasst und so wird z. B. aus einer Summe ein Multiplikand. (Dieses Thema wird durch Übungen unterstützt: ab Seite 27)

Physikalische Größen

- Physikalische Größen sind notwendig, um Zusammenhänge übersichtlich darzustellen.
- In Formeln erscheinen Abkürzungen der physikalischen Größen, die zumeist den Namen der Größen aus verschiedenen Sprachen entlehnt sind. Beispiele sind:
 $v = s/t$ v : velocitas (lat. Geschwindigkeit); s : spatium (lat. Weg, Strecke, Zwischenraum);
 t : tempus (lat. Zeit)
 $F = m \cdot a$ F : Force; m : mass; a : acceleration (alles engl.)
- Eine physikalische Größe stellt grundsätzlich das Produkt aus einem Zahlenwert **und** (!) einer Einheit dar: z. B. $s = 10 \cdot 1m$. Hier wäre die Angabe $s = 10$ ebenso unsinnig, wie $s = m$. Bei der Notation von Größen wird nicht selten die Einheit vergessen, seltsamer Weise nie der Zahlenwert. (In den Klausuren wird ein solches „Ergebnis“ natürlich als falsch gewertet.)

Einheiten und Dimensionen

- Da die Arbeit im messtechnischen Bereich für andere prinzipiell verständlich sein muss, ist es notwendig, die Protokollierung von Messwerten mit genormten Einheiten vorzunehmen und sich einer gültigen Nomenklatur zu bedienen. Messwerte sind oft Grundlage zur Erfüllung von Verträgen, dienen als Beweismittel etc. Eine der wichtigsten staatlichen Reservate ist neben der Münzhoheit auch die Maßhoheit (s. *Eichwesen*, *Verkehrsmaße*). Damit obliegt es in weiten Bereichen nicht mehr dem persönlichen Geschmack, über bestimmte Notationen selber zu entscheiden.
- Die Bestrebung, mit einer geringen Anzahl physikalischer Grundgrößen auszukommen, führt in verschiedenen Gebieten zu unterschiedlicher Zahl von Dimensionen (und damit entsprechend auch zu Einheiten). Für jeden Bereich der Physik benötigt man eine bestimmte Anzahl von Basisdimensionen, die für den betreffenden Bereich charakteristisch sind. Für die Euklidische Geometrie genügt eine Dimension (Länge), für die Kinematik zwei (Länge, Zeit) und die Dynamik (Kinetik) drei. (Elektrizität und Magnetismus, Gravitation, Helligkeitsempfindung, schwache Wechselwirkung, je eine zusätzliche Dimension.)

Mechanik			
Kinematik (Bewegungslehre ohne Kräfte)	Kinetik (Bewegungslehre mit Kräften)	Elektrotechnik	
Länge	Länge	Länge	
Zeit	Zeit	Zeit	
	Masse	El. Spannung	
		El. Strom	

- Zu den Dimensionen gibt es entsprechende gültige Einheiten. Für diese sind Basiseinheiten (SI) definiert, die neben Meter, Sekunde und Kilogramm für die genannten Dimensionen auch noch Ampere für die elektrische Stromstärke, Kelvin für die thermodynamische Temperatur, Candela für die Lichtstärke und Mol als Mengeneinheit festlegen.
- "Unpraktische" Einheiten aus Gründen der Pietät: Hertz, Ohm, Newton, Pascal, etc.
- Neben Grundgrößen (und entsprechenden Einheiten) gibt es abgeleitete Größen.
- Der Zusammenhang der physikalischen Größen in Gleichungen bestimmt die abgeleitete Einheit.
- Vorsätze von Einheiten verschmelzen mit der Einheit, d. h. es ist nur ein Exponent nötig: mm², nicht etwa m²m².
- Verwechslungen von m (Milli) mit m (Meter) lassen sich vermeiden, wenn man 'm' als Einheit nach rechts setzt, also z. B. m·N für Milli-Newton, N·m für Newtonmeter schreibt (s. DIN 1301).

Formeln

Beim Entstehen einer physikalischen Formel ist immer schon eine Anzahl von physikalischen Größen vorhanden, deren Beziehung untereinander durch die Formel ausgedrückt werden soll (z. B. $v=s/t$ für Geschwindigkeit als Funktion von Weg und Zeit) oder deren Verständnis zur Definition eines neuen Begriffes dienen kann. Meist spielen Proportionalitäten eine zentrale Rolle bei der Entstehung einer Gleichung:

$A \propto B$ meint, wenn B sich vergrößert (verkleinert), dann vergrößert (verkleinert) sich A.

$A \propto B^{-1}$ meint, wenn B sich vergrößert (verkleinert), dann verkleinert (vergrößert) sich A.

I. Gesucht: physikalische Größen für Kraft aus beschleunigter Bewegung: ¹

a) durch Wahrnehmung $F \propto m$, $F \propto a$

b) also gilt auch $F \propto m \cdot a$.

c) Suche nach weiteren Größen vergeblich ...

d) mit Proportionalitätskonstante k $F = k \cdot m \cdot a$

e) dadurch sich ergebende Einheit für k $[k] = \left[\frac{F}{m \cdot a} \right] = \frac{?}{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$

Über die Einheit von F ist noch nicht entschieden, so kann $[k]=1$ gesetzt werden; man erhält die einfache Formel $F = m \cdot a$ und für F die zusammengesetzte Einheit: $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{N}$ (Newton).

II: Gesucht: physikalische Größen für Kraft aus Massenanziehung (Gravitation):

a) durch Messungen/ausprobieren $F \propto m_1$, $F \propto m_2$, $F \propto r^{-2}$

b) also gilt auch $F \propto \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$.

c) Suche nach weiteren Größen vergeblich ...

d) mit Proportionalitätskonstante γ $F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

e) dadurch sich ergebende Einheit für γ $[\gamma] = \left[\frac{F \cdot r^2}{m_1 \cdot m_2} \right] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$

Da über die Einheit von F schon unter I. entschieden war, kann **nicht** $[\gamma]=1$ gesetzt werden. Ein zahlenmäßiger (messbarer) Vergleich mit der unter I. definierten Kraft führt zur Einheit und dem Zahlenwert der Proportionalitätskonstanten: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$.

Dieses Verfahren (II) ergibt als Proportionalitätskonstante häufig sogenannte Naturkonstanten (hier die Gravitationskonstante) oder sogenannte Stoffkonstanten, deren Einheit nicht immer anschaulich ist, sich aber aus dem beschriebenen Verfahren erklärt.

¹ Entwicklung zum zweiten Newtonschen Axiom

3. Einige physikalische Größen und Formeln

Definition physikalischer Größen und ihre Einheiten

Definition	Einheit	Bezeichnung / Maßzahl für ...
$v = \frac{s}{t}$	$[v] = \frac{m}{s}$	Geschwindigkeit (in Meter pro Sekunde) / ... zurückgelegten Weg je Zeiteinheit
$a = \frac{v}{t}$	$[a] = \frac{m}{s^2}$	Beschleunigung (in Meter pro Quadratsekunde) / ... Geschwindigkeitsänderung je Zeiteinheit
$p = m \cdot v$	$[p] = kg \cdot \frac{m}{s} = \frac{kg \cdot m \cdot s}{s^2} = N \cdot s$	Impuls (in Newtonsekunde) / ... die Größe des Anstoßes (Impulses)
$F = m \cdot a$	$[F] = kg \frac{m}{s^2} = \frac{kg \cdot m}{s^2} = N$	Kraft (in Newton) / ... Darstellung des allg. Kraftverständnisses
$p = \frac{F}{A}$	$[p] = \frac{N}{m^2} = Pa$	Druck (in Pascal) / ... Kraft, die auf eine Flächeneinheit wirkt
$W = F \cdot s$	$[W] = N \cdot m = J$	Arbeit (in Joule) / ... Kraft, die längs eines Weges wirkt
$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$	$[E] = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m = N \cdot m$	Energie, potentielle und kinetische (in Joule) / ... das Arbeitsvermögen eines Körpers
$E_{kin} = \frac{m}{2} v^2$	$[E] = kg \left(\frac{m}{s} \right)^2 = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = N \cdot m$	
$P = \frac{W}{t}$	$[P] = \frac{J}{s} = W$	Leistung (in Watt) / ... die geleistete Arbeit je Zeiteinheit (für mechanische und elektrische Größen)
$P = U \cdot I$	$[P] = V \cdot A = W$	
$I = \frac{E}{t \cdot A}$	$[I] = \frac{J}{s \cdot m^2} = \frac{W}{m^2}$	Intensität (in Watt pro Quadratmeter) / ... die Strahlungsenergie, die je Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit strömt
$D = \frac{E}{m}$	$[D] = \frac{J}{kg} = Gy$	Energiedosis D (in Gray) / ... je 1 kg absorbierte Energie Äquivalentdosis H (in Sievert) / ... je 1 kg gewichtete, absorbierte Energie
$H = D \cdot q = \frac{E}{m}$	$[H] = \frac{J}{kg} = Sv$	

Formelauswahl zu Themengebieten der Physik

Mechanik

2. Newtonsches Axiom

$$F = m \cdot a$$

Kinetische/potentielle Energie

$$E_{kin} = \frac{m}{2} v^2 \quad E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

Archimedisches Prinzip

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V$$

Arbeit / Leistung

$$W = F \cdot s \quad P = \frac{W}{t}$$

Wärmeenergie / Wärmestrahlung

Wärmeenergie

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

Strahlungsleistung

$$P = \sigma \cdot \varepsilon \cdot A \cdot T^4$$

Elektrizität

Grundgleichung

$$U = R \cdot I$$

Energie

$$E = U \cdot I \cdot t$$

Leistung

$$P = U \cdot I$$

Strahlenoptik

Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

Brechwert

$$D = \frac{1}{f}$$

Vergrößerung

$$v = \frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon_0} \approx \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

Wellenoptik

Brechzahl

$$n = \frac{c_0}{c_{Medium}}$$

Maximumbedingung am Gitter

$$d \cdot \sin \alpha = \lambda \cdot m$$

Schall

Schallpegel (in dB) / Lautstärkepegel (in phon)

[I: Schallintensität (=Schallstärke), p: Schalldruckamplitude]

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0} \left(= 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0} \right) \text{ dB} \quad \text{phon}$$

Röntgenstrahlung

Maximalenergie der Röntgenquanten E_γ aus Beschleunigungsspannung U der Elektronen

$$E_{\max} = U \cdot e_0 \Rightarrow E_\gamma = h \cdot f_{\max} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{\min}} = U \cdot e_0$$

Quantenenergie

$$E_\gamma = h \cdot f$$

Schwächungsgesetz

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot d}$$

Radioaktivität

Zerfallsgesetz

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Aktivität

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Fundamentales

Frequenz/Periode

$$f = \frac{1}{T}$$

Allg. Beziehung der Wellenlehre

$$c = \lambda \cdot f$$

Diese hier aufgeführten Formeln sollten Sie für die Klausuren lernen .

4. Umgang mit Messwerten

Erhebung von Messwerten

- Bei einer Erhebung und Beurteilung von physikalischen Messwerten sind Gerätespezifika zu bedenken. Ein Oszilloskop stellt sehr detailliert und verzögerungsfrei wechselnde Spannungen dar, kann aber ohne besondere Eichmethoden an Genauigkeit der gemessenen Spannungsgröße (~5%-Fehler) mit einfachen Multimetern schon nicht mehr mithalten.
- Die Genauigkeit von digital anzeigenden Messgeräten ist prinzipiell nicht höher als die von analog anzeigenden.
- Vor jeder Messreihe müssen die Messgeräte gegebenenfalls auf bestimmte Messbereiche eingestellt bzw. justiert werden.
- Zu den subjektiven Unzulänglichkeiten bei den Messungen gehört auch der Ablesefehler (Parallaxe und ähnliches), sowie die Tagesform der messenden Person.

Auswertung der Messergebnisse

- Die Messwerte sollten auf "Ausreißer" hin untersucht werden, die das Gesamtergebnis verfälschen (intuitive Beurteilung). Dabei werden allerdings auch Fehler gemacht, wie das Beispiel "Ozonloch" zeigt (zunächst als Fehlmessung angesehen, erst 1974 bekannt gegeben).
- Der beste Kommentar zu einer Reihe von Messwerten liegt in einem aussagekräftigen Ergebnis. Dazu gehört neben einem Zahlenwert in erster Linie die physikalische Einheit und eine Angabe über den Vertrauensbereich des Ergebnisses. Dieser Vertrauensbereich ist in vielen Fällen durch die Standardabweichung des Mittelwertes (auch sinnfälliger: mittlerer Fehler des Mittelwertes) gegeben.
- Die Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$ des Mittelwertes \bar{x} besagt, dass der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von $P=68,3\%$ innerhalb des Bereiches $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ liegt (gilt bei „genügend hoher Zahl“ von Messungen).

Mittelwerte

Arithmetisches Mittel: $\bar{x}_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ sinnvoll bei Zahlenreihen (für Messreihen im Praktikum)

Geometrisches Mittel: $\bar{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$ bei Durchschnitt relativer Größen (Wachstumsraten)

Harmonisches Mittel: $\bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$ (sinnvoll bei reziproken Zahlenreihen, s. arith. Mittel)

Sammlung von Messwerten in Tabellen

- Tabellen eignen sich gut, um Messwerte übersichtlich zu sammeln. Dann können aus dieser Datensammlung Ergebnisse durch Rechnungen gewonnen oder leicht grafische Darstellungen erstellt werden.
- Bei der Tabelle unterscheidet man grundsätzlich den Zahlenbereich, in dem nur Zahlenwerte enthalten sind, vom Definitionsbereich, in dem physikalische Größen (nebst deren Einheiten) und Hinweise auf die Messung protokolliert werden. Dabei gilt bei uns im Praktikum:

Tabellenkopf und Zahlenbereich sind derart getrennt, dass sich dieselbe Zuordnung wie bei einer Gleichung für den Wert einer physikalischen Größe ergibt.

Beispiel: $T_1 = 232,2 \cdot K \xrightarrow{\text{Gleichung durch die Einheit teilen}} \frac{T_1}{K} = 232,2$

Zwei Tabellenarten sind zu unterscheiden:

- I. Spalten sortiert nach Messgrößen, Zeilen sortiert nach Nummer der Messung
- II. Spalten sortiert nach erstem Parameter, Zeilen sortiert nach zweitem Parameter

Zu I.

- Die zu messenden Größen und zugehörige Einheiten sammeln. Für jede Größe eine Spalte in der zu erstellenden Tabelle vorsehen.
- Wenn Zwischenergebnisse je Messung erstellt werden sollen, auch dafür Spalten vorsehen.
- Zeilen gemäß der angenommenen Anzahl von Messungen in der Tabelle reservieren.

i	T / K	$\rho / (\text{g} \cdot \text{cm}^{-3})$...
1	232,2	232,2	...
2	235,4	235,4	...
...
n

- Die erste Spalte ist für die Nummerierung der individuellen Messungen reserviert, die Indexvariable i für die Messungen wird also beim tabellarischen Protokollieren nicht mehr an die Messgröße geschrieben.
- Die Einheit der Messwerte erscheint nun im Tabellenkopf.
- Versuchen Sie, sich über die Größenordnung der Messwerte vor der Protokollierung im klaren zu werden, damit Irrtümer bei der Messung bald auffallen **und** damit gegebenenfalls bei hoher Stellenzahl die Zehnerpotenzen der Messwerte in den Tabellenkopf geschrieben werden können.

Beispiel: $k_1=0,00023$; $k_2=0,00045$; $k_3=0,00067$ bei

$f_1=4322$ Hz; $f_2=4354$ Hz; $f_3=4387$ Hz

i	$k \cdot 10^4$	$f / (10^3 \text{ Hz})$	$f \cdot 10^{-3} / \text{Hz}$
1	2,3	4,322	4,322
2	4,5	4,354	4,354
3	6,7	4,387	4,387

In der zweiten Spalte hätte man auch die Notation $k / 10^{-4}$ wählen können. In den beiden letzten Spalten sind identische Werte bei unterschiedlicher Darstellung des Tabellenkopfes protokolliert, wodurch die Handhabung der Zehnerpotenz nochmals deutlich wird.

Zu II.

- Für den Umgang mit den Messwerten gelten die Regeln für den ersten Tabellentyp auch hier.
- Es kann in einer Tabelle die Abhängigkeit einer oder mehrerer physikalischer Messgrößen von einer anderen Messgröße oder einem Parameter protokolliert werden. In der Anzahl der Zeilen und Spalten drückt sich dann entweder die Variation eines Parameters aus, oder die Anzahl der Messungen.

Beispiel: Hier wird λ mehrfach gemessen, α ist eine zusätzliche Größe und m ist ein Parameter von dem λ und α abhängen.

$\lambda_1=420\text{nm}$ $\lambda_2=422\text{nm}$ $\lambda_3=439\text{nm}$ nebst $\alpha=21,3^\circ$ bei $m_1=1$ usw.

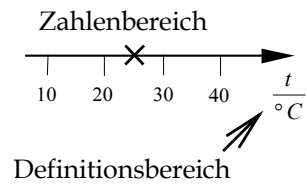
	λ_1 / nm	λ_2 / nm	λ_3 / nm	$\bar{\lambda} / \text{nm}$...	$\alpha / ^\circ$
$m = 1$	420	422	439	427	...	21,3
$m = 2$	456	453	453	454	...	24,5
$m = 3$	570	578	583	577	...	29,3
...
$m = n$	659	650	653	654	...	36,6

Beispiele für Tabellenköpfe aus der Literatur werden im PBS-Seminar gezeigt.

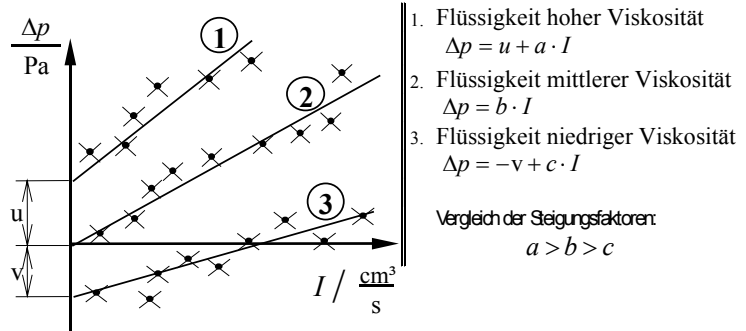
Darstellung von Messwerten durch Graphen

- Graphen visualisieren Messergebnisse physikalischer Größen nur dann richtig, wenn keine physikalischen Inhalte verloren gehen.
- Eine Koordinate ist in Zahlenbereich und Definitionsbereich unterteilt. Die Achsenbezeichnung (=Definitionsbereich) und der Zahlenbereich stehen in der gleichen Zuordnung, wie sie sich bei einer Gleichung für eine physikalische Größe ergibt. Für das Zahlenbeispiel rechts gilt:

$$\frac{t}{^{\circ}\text{C}} = 25 \quad \Rightarrow \quad t = 25^{\circ}\text{C}$$



- Bei der grafischen Darstellung eines Zusammenhanges zweier physikalischer Größen in einem Koordinatensystem unterscheidet man grundsätzlich den Zahlenbereich, in dem durch Punkte oder Kreuze Zahlenpaare markiert und damit protokolliert werden, von den Definitionsbereichen, in denen die physikalischen Größen nebst Einheiten (und evtl. Zehnerpotenzen) notiert werden. Im Beispiel werden auch die Steigungsfaktoren und additiven Größen erkennbar.



Viskosität am Druckdifferenz–Stromstärkediadgramm

- Die physikalischen Größen zur Achsenbezeichnung bedürfen stets einer Einheit, wenn diese von eins verschieden ist. Falsch ist es, die Einheit in eckige Klammern zu setzen.
- Die numerische Achsenteilung wird dem Zahlenbereich des Datenmaterials angepasst.
- Graphen werden sinnvoll betitelt, sodass eine inhaltlich thematische Zuordnung möglich ist.
- Die Ausgleichsgeraden sind für lineare Koordinaten und lineare Zusammenhänge der Größen als gerade Linien durch die visuelle Mitte der Messpunkte zu ziehen. Ist eine Achse logarithmisch geteilt, so ist der Achsenmaßstab zu berücksichtigen (s. Beispiel S. 17).
- Sind keine Messpunkte für den Nullpunkt (Origo = Ursprung) des Koordinatensystems vorhanden, wird die Ausgleichsgerade dennoch durch den Nullpunkt gezogen, falls dies aus dem physikalischen Zusammenhang gesichert ist.
- Der Sinn einer Ausgleichsgeraden für eine Messwerteschar kann in der Ermittlung eines unbekannten Faktors oder Summanden für eine Variable der Gleichung bestehen.
- Sind mehrere Kurven in ein Koordinatensystem gezeichnet, so werden diese nummeriert und eine Legende angelegt.
- Liegen in einem Koordinatensystem mit linearer Achsenteilung die Messwerte tendenziell auf "gekrümmter Bahn", so besteht der Verdacht auf eine Potenzfunktion oder einen exponentiellen Zusammenhang der Messgrößen. Dann darf keine gerade Kurve (sog. Ausgleichsgerade) mehr durch die Messpunkte gelegt werden. Um zu klären, ob eine Potenz- oder Exponentialfunktion vorliegt, probiert man zur Darstellung der Werte verschiedene logarithmische Netze aus.
- Die Logarithmierung einer Gleichung zeigt, dass eine einfache Potenz- bzw. Exponentialfunktion als Geradengleichung aufgefasst werden kann und auf entsprechenden logarithmischen Netzen dann auch als Gerade dargestellt werden kann, wenn die logarithmierten Variablen den logarithmischen Achsen zugeordnet werden (s. nächste Seite).

Wahl der Koordinaten

Zur Auswahl stehen Papiere mit

- ⇒ (1) linearem Netz [beide Koordinatenteilungen linear],
- ⇒ (2) halblogarithmischem Netz [eine Koordinatenteilung logarithmisch] und
- ⇒ (3) doppeltlogarithmischem Netz [beide Koordinatenteilungen logarithmisch].

Für die Basis der logarithmischen Teilung einer Achse wird praktisch nur der dekadische Logarithmus verwendet. Daneben gibt es weniger populäre Netze, z. B. mit logarithmisch-hyperbolischer Achsenteilung. (Über logarithmische Skalen siehe S. 16)

Zu 1 (lin, lin)

- Beide Achsen sind linear geteilt.
- Einfache Handhabung der Messwerte und erste Orientierung bei mathematisch unbekanntem Zusammenhang der Messgrößen. Die Ausgleichskurve ist nur bei linearem Zusammenhang der Messgrößen leicht zu zeichnen; dann entfällt die Notwendigkeit ihrer rechnerischen Ermittlung (Regression) zur Bestimmung von Steigung und Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen.
- Aus positiver oder negativer Krümmung einer Messwerteschar ist erkennbar, ob die Potenz $n > 1$ oder $n < 1$ ist. Eine genauere Bestimmung ist aber auf rein linearen Netzen kaum möglich. Übrigens ändert sich ein „Drehsinn“ der Kurve(n) beim Vertauschen der Achsen. Hier ist aus dem Exponenten der $y = a \cdot x^2 \Rightarrow x = k\sqrt{y} = k \cdot y^{\frac{1}{2}}$ unabhängigen Variablen >1 einer < 1 geworden.
- Messwerte im linearen Netz eingetragen, sind aussagekräftig bei linearem Zusammenhang der Messgrößen, da die Bestimmung von Faktoren und Summanden leicht ist (s. Beispiel Seite 13). So ist bei entsprechender Anzahl der Messwerte ein additives Glied in einer Gleichung, die den Zusammenhang der Messgrößen darstellt, mit guter Genauigkeit zu ermitteln.

Zu 2 (lin, log)

- Eine Achse ist linear, die andere logarithmisch geteilt.
- Bei Exponentialfunktionen erhält man eine Gerade mit den Vorteilen aus Punkt 1, wenn die logarithmierte Variable auf der logarithmischen Achse dargestellt wird (die Ausgleichsgerade ist *so einfach* wie oben zu zeichnen, die Faktorenbestimmung vor dem Exponenten *nahezu so einfach*) :

$$y = e^{a \cdot x} \Rightarrow \lg y = x \cdot a \cdot \lg e \quad (\text{analog zur Geradengleichung } y = ax)$$

- BESONDERHEITEN: Es gibt keinen Nullpunkt mehr für die Messgröße (z. B. y) auf der logarithmischen Achse, dieser findet seine Entsprechung im „Eins-Punkt“. Mit $y = 1$ folgt z. B.: $\lg y = \lg 1 = 0$. Ebenso ergeben negative Werte einer Messgröße keinen mathematischen oder physikalischen Sinn.

LOGARITHMISCHE FUNKTIONEN SIND FÜR ARGUMENTE $y \leq 0$ NICHT DEFINIERT.

Zu 3 (log, log)

- Im doppeltlogarithmischen Netz sind beide Achsen logarithmisch geteilt. Großer Zahlenbereich (meist einige Zehnerpotenzen) für beide dargestellten physikalischen Größen.
- Gut zur Darstellung von Potenzfunktionen geeignet, mit den Vorteilen aus Punkt 1:

$$P = k \cdot T^4 \Rightarrow \log P = 4 \cdot \log T + \log k \quad (\text{analog zu } y = mx + b) \\ \text{mit } m = 4 \text{ und } b = \lg k$$

ES GIBT AUF LOGARITHMISCHEN ACHSEN KEINEN NULLPUNKT UND KEINE NEGATIVEN WERTE!

Endergebnisse aus Tabellen und Graphen, Standardabweichung

- Ein Erwartungswert für das Endergebnis ist bereits vor den Messungen aus der Literatur zu entnehmen, um eine Kontrolle für fehlerhafte Messungen bzw. Rechnungen zu haben.
- Bei großen Abweichungen von den Erwartungswerten sind Kommentare zum Ergebnis nötig. Wenn z. B. für die Schallgeschwindigkeit in Luft ein Wert von $c = 800 \text{ms}^{-1}$ ermittelt wurde, dann liegen prinzipielle Fehler vor, die eine Messreihe vollständig entwerten.
- Ein Ergebnis besteht aus dem Produkt von Zahlenwert **und** Einheit!
- Die Zahl der Nachkommastellen des als Ergebnis angegebenen Mittelwertes muss gleich der Zahl der Nachkommastellen der zugehörigen Standardabweichung sein.
- Die Einheit des Fehlers muss gleich der Einheit des angegebenen Mittelwertes sein; das gilt auch für die Vorsätze der Einheiten!
- Bezüglich der Fehlerangabe reicht es im Praktikum, die Standardabweichung der Einzelmessung (bei wissenschaftlichen Taschenrechnern meist als Funktion eingebaut) von derjenigen des Mittelwertes unterscheiden zu können. Nur letztere ist im Praktikum von Bedeutung!

Vertrauensbereich der Einzelmessung:
$$\sigma(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Vertrauensbereich des Mittelwertes:
$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}} = \frac{\sigma(x_i)}{\sqrt{n}}$$

- **Für die Praxis** sollten Sie sich angewöhnen, die Messergebnisse in einer standardisierten Tabelle zu erfassen, mit der Sie auch den Mittelwert und seine Standardabweichung ermitteln können:

Beispiel: Messungen der Schallgeschwindigkeit

i	$c / \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$(c - \bar{c}) / \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$(c - \bar{c})^2 / \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$
1	327,01	- 4,27	18,23
2	329,15	- 2,13	4,54
3	330,47	- 0,81	0,66
4	334,17	2,89	8,35
5	335,60	4,32	18,66
Σ	1656,40	0	50,44

- Spalte 1: Zahl i der Messungen notieren
- Spalte 2: Die Messwerte erfassen und ihre Summe bilden. Diese Summe wird dann durch die Anzahl n der Messungen geteilt und ergibt den arithmetischen Mittelwert \bar{x} .
- Spalte 3: Zu jedem Messwert aus Spalte 2 wird seine Differenz zum Mittelwert \bar{x} berechnet und notiert. (Zur Kontrolle kann die Summe gebildet werden, die stets Null ergeben muss.)
- Spalte 4: Jeder Wert aus Spalte 3 wird quadriert; diese berechneten Werte werden summiert.

Das Ergebnis aus Spalte 4 wird gemäß obiger Formel für die Standardabweichung des Mittelwertes durch $n(n-1)$ geteilt und radiziert. Vergessen Sie bei der Notation des Ergebnisses nicht die Einheit des Mittelwertes und die seiner Standardabweichung (die gleiche) anzugeben, z. B.:

$$c_{\text{Luft}, t=0^\circ\text{C}} = 331,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{bzw.} \quad c_{\text{Luft}, t=0^\circ\text{C}} = (331,3 \pm 1,6) \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

- Die Standardabweichung des Mittelwertes ist im Taschenrechner nicht als Funktion eingebaut; um sie zu erhalten muss das Ergebnis der eingebauten Standardabweichung der Einzelmessung $\sigma(n-1)$ noch durch \sqrt{n} geteilt werden. [Bei Verwendung einer $\sigma(n)$ -Taste natürlich durch $\sqrt{n-1}$ teilen]

(Dieses Thema wird durch Übungen unterstützt: Seite 39.)

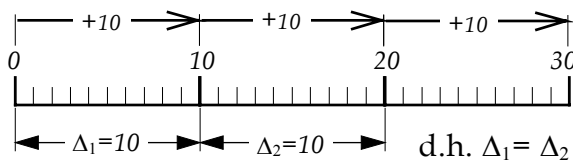
5. Verwendung dekadischlogarithmischer Skalen

Vorbemerkungen

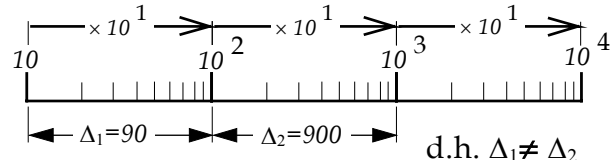
- Auf einer linear geteilten Koordinate besitzen gleiche Differenzen ($a-b$) von Zahlenwerten gleiche Abstände auf der Skala. Dagegen werden bei einer logarithmischen Teilung gleiche Quotienten (a/b) grafisch durch gleich große Strecken dargestellt, denn

$$\text{aus } \frac{a}{b} \text{ wird durch Logarithmierung } \log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Skala mit linearer Teilung

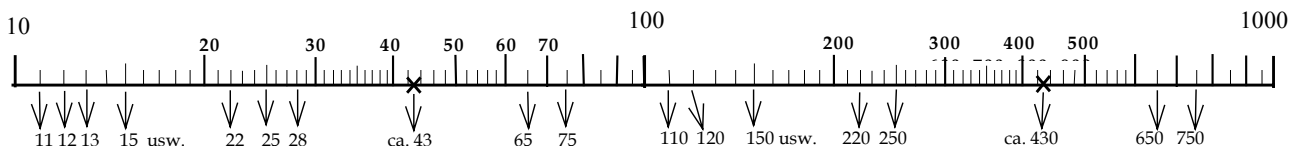


Skala mit logarithmischer Teilung



- Die Wertebereiche auf der logarithmisch geteilten Skala sind verzerrt dargestellt und so entsprechen gleiche Abstände stets unterschiedlichen Werten.

Zwei Dekaden (hier 10–100 und 100–1000) auf logarithmischer Skala mit Zwischenwerten:

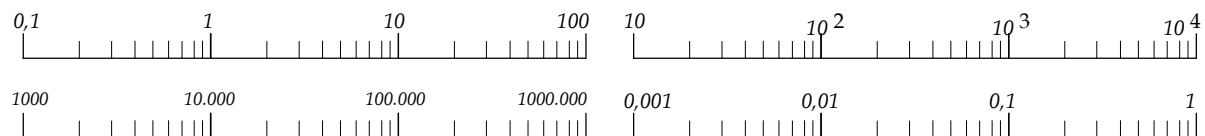


- Innerhalb einer Dekade ist die weitere Unterteilung durch Hilfslinien unterstützt, die jedoch i. a. unterschiedliche Schrittweiten haben. Kontrollieren durch Auszählen ist hier nötig, bevor Messwerte sicher protokolliert werden können.
- Üblich sind nur dekadisch geteilte Skalen (auf dem Zehnerlogarithmus basierende).

Skalierung

- Die Skalierung einer logarithmischen Skala erfolgt durch die Beschriftung der Dekadenabschnitte mit Werten fortlaufender Zehnerpotenzen (im Beispiel oben: 10^1 , 10^2 , 10^3).
- Auf logarithmisch geteilten Skalen gibt es keinen Nullpunkt und keine negativen Werte, denn im Bereich der reellen Zahlen ist der Ausdruck $\lg x$ für $x=0$ nicht definiert. ($\lg 0 \rightarrow -\infty$)

Beispiele für Skalierungen:



- Anders als bei linearen Skalen dürfen auf logarithmischen Skalen keine Konstanten zu den Skalenwerten hinzu addiert werden, etwa um den Wertebereich der Skala dem des Datenmaterials anzupassen. Dagegen ist die Multiplikation mit einer Konstanten erlaubt, erschwert jedoch oft die Lesbarkeit grafischer Darstellungen (Kommunikationsprobleme). Bei der Skalierung logarithmischer Skalen sollten Sie sich für den Anfang damit begnügen, die Dekadenabschnitte mit glatten Zehnerpotenzen zu bezeichnen: z. B. 0,01 | 0,1 | 1 | 10 | 100, bzw. in der Potenzschreibweise 10^{-2} | 10^{-1} | 10^0 | 10^1 | 10^2 . Die Wahl der Zehnerpotenzen ergibt sich dabei aus dem Wertebereich des Datenmaterials.

So dürfen Sie niemals skalieren :

- ☹ Zu der Skalierung (0,1 | 1 | 10 | 100) wurde der Wert 300 addiert, vielleicht um auf der Skala durch Streckung einzelne Werte besser voneinander unterscheiden zu können. **Das war falsch! Wenn es denn durchaus sein soll, nur Multiplizieren.**



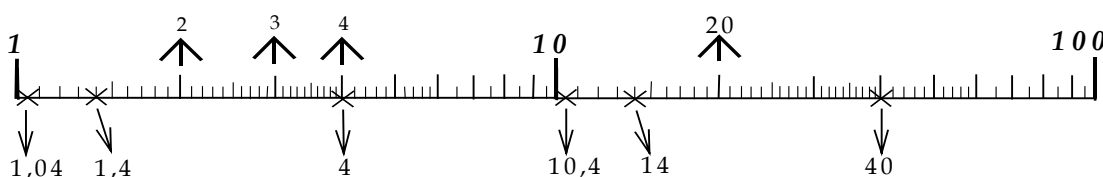
- ☹ Es können **keine negativen Werte** und **keine Null** dargestellt werden.



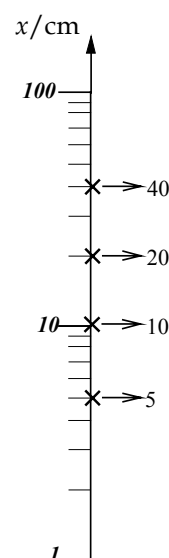
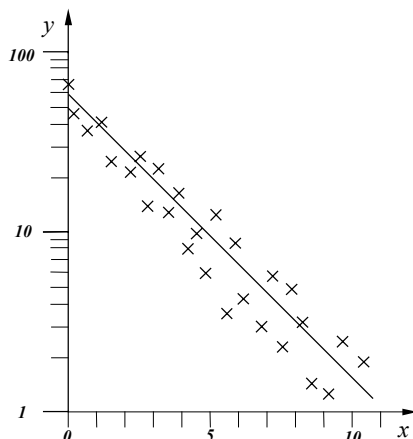
(Dieses Thema wird durch Übungen unterstützt: Seite 48.)

Messwerte eintragen

- Die Messwerte werden direkt eingetragen, d. h. ohne sie vorher zu logarithmieren, denn die Logarithmierung erfolgt auf logarithmischen Skalen grafisch. Erst wenn ein Steigungsfaktor aus einem Steigungsdreieck berechnet werden soll, müssen diejenigen Eckwerte des Dreiecks, die sich auf einer logarithmischen Achse befinden, auch rechnerisch logarithmiert werden.
- Irrtümer beim Eintragen und Ablesen von Werten kommen häufig durch Fehleinschätzung von Dezimalstellen zustande. So sind Verwechslungen von Werten typisch, wie z. B.: 1,04 | 1,4 | 10,4 | 14 | 40 usw. Hinzu kommt, da keine Nullstelle existiert, dass hier die erste Unterteilung der Dekade die Dezimalstelle 2 hat, nicht die 1, wie bei linearen Skalen.



- Da die Messwerte auch auf logarithmischen Achsen ohne umzurechnen grafisch protokolliert werden, erfolgt die Achsenbezeichnung auch nur durch die Angabe der physikalischen Größe (geteilt durch deren Einheit), nicht durch ihren Logarithmus; also z. B. x/cm , nicht etwa $\lg x$.
- Was auf linearen Koordinaten durch Anschaulichkeit unterstützt wird, nämlich die Halbierung eines physikalischen Wertes, kann auf logarithmischen Skalen zu ernststen Fehleinschätzungen führen. Dies betrifft wichtige Größen wie die Halbwertszeit oder die Halbwertsdicke. Um z. B. den Wert 40 zu halbieren, wird keineswegs die Strecke 1 - 40 (linear-geometrisch) halbiert (s. rechts).
- Ziel einer grafischen Protokollierung von Messwerten in einem Koordinatensystem ist die Darstellung des funktionellen Zusammenhanges zweier physikalischer Größen, der sich besonders deutlich durch eine Ausgleichsgerade zeigen läßt. Bei logarithmischen Skalen ist dabei auf die Verzerrung des Achsenmaßstabes zu achten, so dass eine Ausgleichsgerade nicht mehr durch die visuelle Mitte der Messpunkteschar gezogen werden kann. Eine korrekte Ausgleichsgerade *erscheint* als zu höheren Werten hin verschoben.

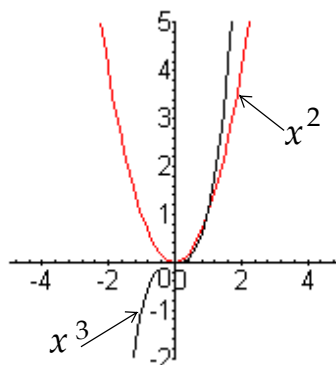


(Dieses Thema wird durch Übungen unterstützt: Seite 49.)

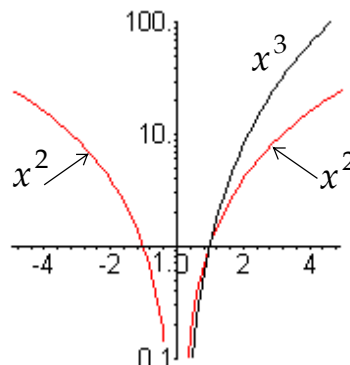
6. Funktionen auf verschiedenen Netzen

Einfache Potenz- und Exponentialfunktionen

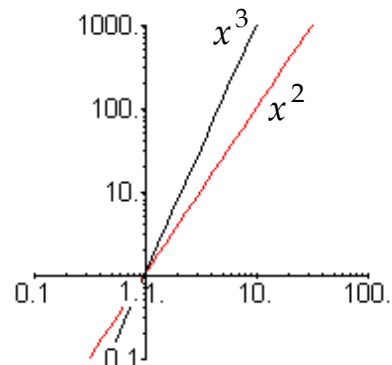
Lineares Netz



Halblogarithmisches Netz



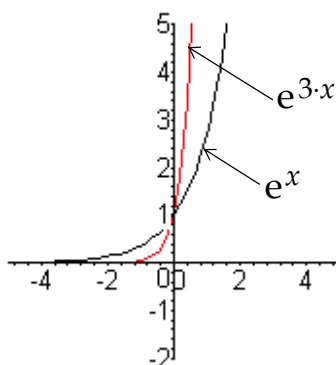
Doppeltlogarithmisches Netz



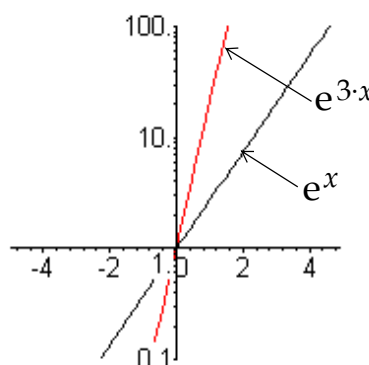
Potenzfunktionen $y = x^2$ und $y = x^3$

1. Potenzfunktionen führen auf doppeltlogarithmischem Netz zu linearen Graphen, da nach dekadischer Logarithmierung der Gleichung die beiden Variablen x **und** y logarithmiert vorliegen.
2. Beispiel: $y = x^3 \Rightarrow \lg y = 3 \cdot \lg x$ (Geradengleichung mit Steigung 3)
3. Die Potenz erscheint dann als Faktor und bestimmt die Steigung der Geraden:
4. Auch wenn die Koordinaten so aussehen: Es gibt bei logarithmischen Achsen keinen Nullpunkt und keine Möglichkeit, negative Werte der Variablen darzustellen.
5. Den „Nullpunkten“ für x, y -Werte in linearen Koordinaten entsprechen bei logarithmischer Darstellung die „Einspunkte“ der logarithmischen Koordinaten.

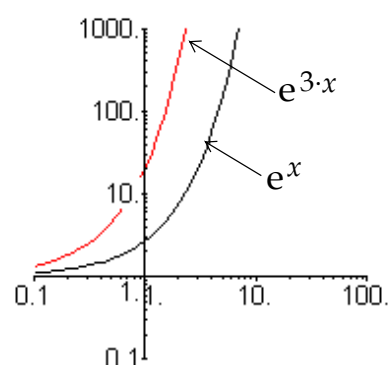
Lineares Netz



Halblogarithmisches Netz



Doppeltlogarithmisches Netz



Exponentialfunktionen $y = e^x$ und $y = e^{3x}$

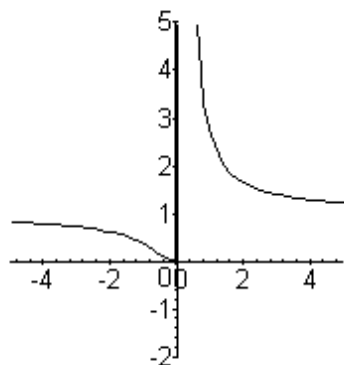
1. Exponentialfunktionen ergeben auf halblogarithmischem Netz eine Gerade, wenn die nach der Logarithmierung der Gleichung logarithmisch auftretende Variable der logarithmischen Achse zugeordnet wird.

2. Beispiel: $y = e^x \Rightarrow \lg y = x \cdot \lg e \approx 0,4343 \cdot x$

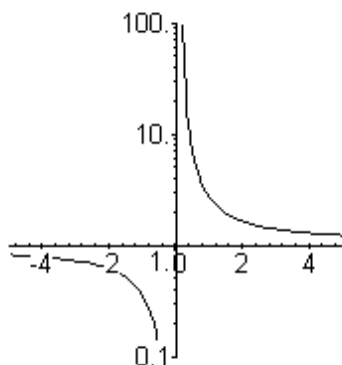
Chronischer Hinweis:

Den „Nullpunkten“ für x, y -Werte in linearen Koordinaten entsprechen bei logarithmischer Darstellung die „Einspunkte“ der logarithmischen Koordinaten ($\lg 1 = 0$).

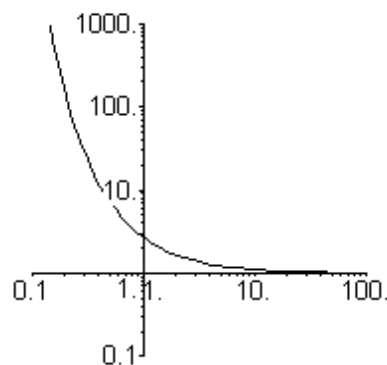
Lineares Netz



Halblogarithmisches Netz



Doppeltlogarithmisches Netz



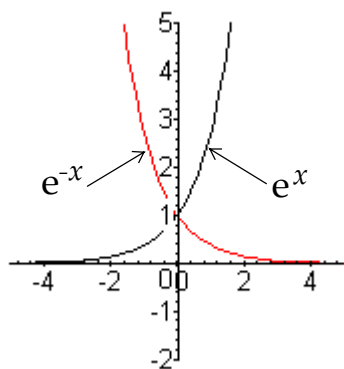
Exponentialfunktion $y = e^{\frac{1}{x}}$

1. **Exponentialfunktionen mit gebrochenem Exponenten** führen auf keinem lin/log-Netz zu linearen Graphen, da die Logarithmierung eine Hyperbelfunktion ergibt. Um eine Kurve mit konstanter Steigung (sog. Gerade) zu erhalten, ist also ein log-hyp-Netz nötig, da eine Achse $1/x$ – geteilt ist. Man erhält aber auch durch Substitution eine Gerade, wenn $1/x=z$ gesetzt wird und $y=f(z)$ aufgetragen wird; an einer Koordinatenachse erscheint statt x dann $1/x$ bzw. z .

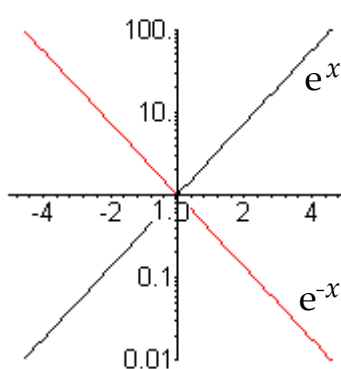
2. Beispiel: $y = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lg y = \frac{1}{x} \cdot \lg e \approx \frac{0,4343}{x}$

Vergleich von e -Funktionen

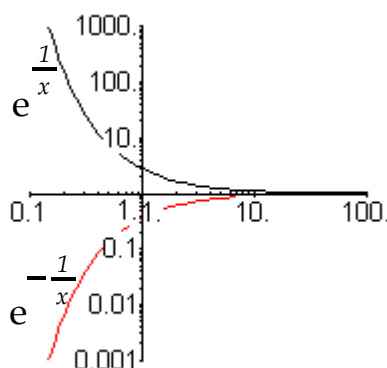
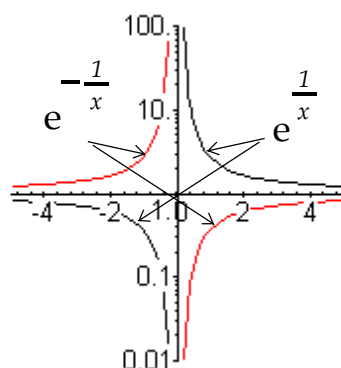
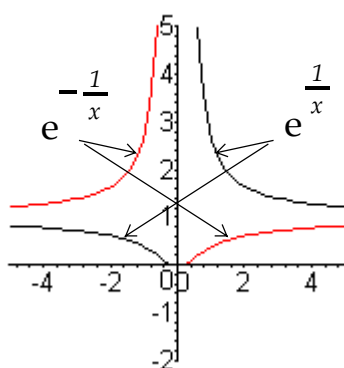
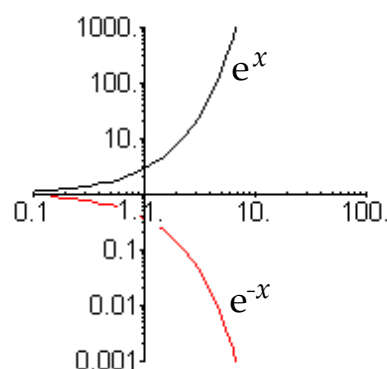
Lineares Netz



Halblogarithmisches Netz



Doppeltlogarithmisches Netz



Die Logarithmierung einer Gleichung ist ab Seite 302 besprochen und ab Seite 42 können Sie üben, die Graphen von e -Funktionen zu erkennen.

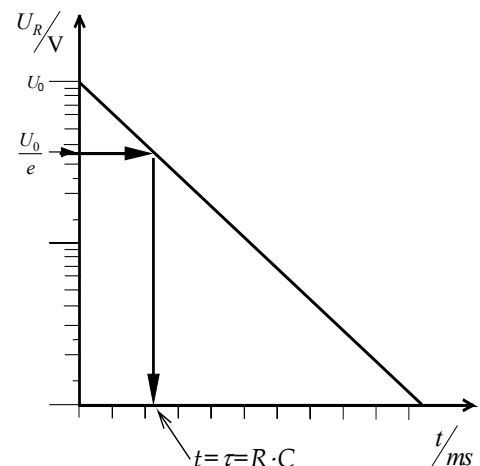
Beispiele aus den Praktikumsinhalten

- Physikalische Sachverhalte lassen sich oft auf verschiedene Weise darstellen (und lernen!). Dazu zählen verbale Aussagen, Formeln und Graphen. Häufig können einen bestimmten Sachverhalt charakterisierende Größen dem Graphen entnommen werden.
- Aus Messwerten erzeugte Graphen sind leicht zu zeichnen, wenn sich eine Gerade ergibt. Bei potentiell oder exponentiellem Zusammenhang der Messgrößen erreicht man - wie auf den vorigen Seiten und im weiteren auch hier gezeigt - durch dekadische Logarithmierung eine transformierte Gleichung, der zu entnehmen ist, welche physikalische Größe auf einer logarithmischen und welche auf einer linearen Achse protokolliert werden muss, um eine Geradendarstellung der Funktion zu ermöglichen.
- Prinzipiell lassen sich solche Gleichungen auch „natürlich“ logarithmieren (zur Basis e), es fehlt dann allerdings der Zusammenhang zur grafischen Darstellung auf dekadischlogarithmischem Netz.

Elektrische Spannung am RC-Schaltkreis:

Der zeitliche Spannungsverlauf an einem Widerstand im elektrischen RC-Schaltkreis wird durch eine Exponentialfunktion mit negativem Exponenten beschrieben. Nach dem mathematischen Logarithmieren¹ der Funktion erkennt man, dass sich auf halblogarithmischem Netz eine Gerade mit negativer Steigung ergibt, wenn die Spannung U_R logarithmisch und die Zeit t linear aufgetragen wird.

$$U_R = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \Rightarrow \lg U_R = \lg U_0 - \frac{\lg e}{R \cdot C} \cdot t$$



Charakteristische Größe aus dem Graphen: Die Funktion wird bei der Zeit $t = R \cdot C$ besonders einfach. Es gilt dann für die Spannung am Widerstand $U_R = U_0 \cdot e^{-1} \approx 0,37 \cdot U_0$.

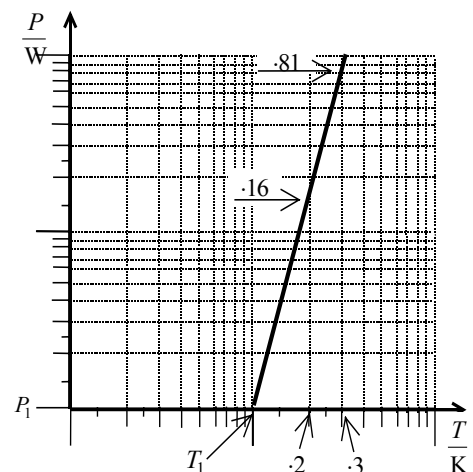
Berechnet man diesen Wert, so kann man die entsprechende Zeit, die sogenannte Zeitkonstante τ aus dem Graphen ermitteln. Die Zeitkonstante dient zur Charakterisierung eines RC-Schaltkreises.

Temperaturstrahlung:

Nach dem Gesetz von Stefan-Boltzmann strahlt jeder Körper elektromagnetische Strahlung mit einer Strahlungsleistung P aus, die proportional der vierten Potenz seiner thermodynamischen Temperatur T ist. Nach dem mathematischen Logarithmieren der Stefan-Boltzmann-Gleichung zeigt sich, dass sich die Form einer Geradendarstellung ergibt, wenn die Variablen P und T logarithmisch aufgetragen werden.

$$P = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4 \Rightarrow \lg P = \lg(\varepsilon \cdot \sigma \cdot A) + 4 \cdot \lg T$$

Die starke Abhängigkeit der Strahlungsleistung P von Temperaturänderungen kann man auch aus dem Graphen schnell ablesen, wenn man - wie gezeigt - einen Ausgangswert von T_1 z. B. verdoppelt ($T_2 = 2 \cdot T_1$) und dann den zugehörigen P_2 -Wert aus der Kurve abliest.



$$P \propto T^4 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = \frac{(2 \cdot T_1)^4}{T_1^4} = 2^4; \quad P_2 = 16 \cdot P_1$$

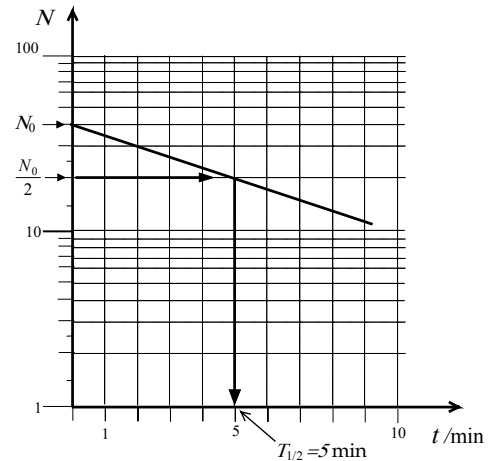
¹ Die Variablen der Gleichung werden als mathematische Objekte aufgefasst, da für logarithmische Ausdrücke Variable mit Einheiten keinen Sinn ergeben. Beim grafischen Notieren wird wieder zu Größen mit Einheiten übergegangen.

Radioaktivität:

Die Steigung der Exponentialfunktion für das radioaktive Zerfallsgesetz ist negativ, da der Exponent der Funktion negativ ist. Auf halblogarithmischem Netz ergibt sich eine Kurve konstanter Steigung (Gerade), wenn N auf der logarithmischen und t auf der linearen Koordinate aufgetragen wird. Die Begründung dafür erkennt man nach mathematisch, dekadischer Logarithmierung der dargestellten Funktion:

$$N = N_0 e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow \lg N = \lg N_0 - \lambda \cdot \lg e \cdot t$$

Die Anzahl N der noch nicht zerfallenen Kerne liegt jetzt logarithmiert vor, die Zeit t dagegen linear. Der Faktor $(-\lambda \cdot \lg e)$ bestimmt die Steigung der Geraden.



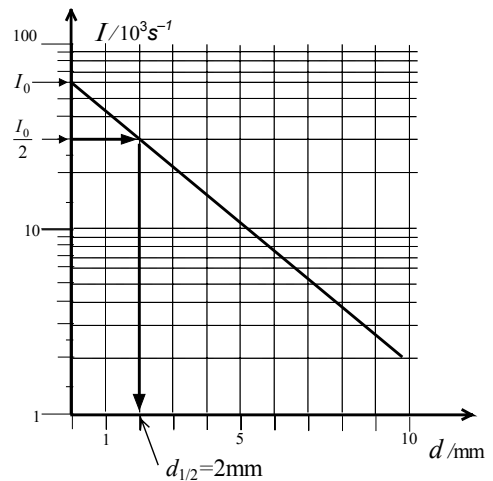
Charakteristische Größe aus dem Graphen: Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ bezeichnet die Zeit, in der die Hälfte der anfänglich vorhandenen Kerne zerfallen sind. Sie ist leicht aus dem Graphen abzulesen.

Röntgenstrahlung:

Die Absorption von Röntgenstrahlung beim Durchgang verschiedener Materialien ist neben der Ordnungszahl Z des betreffenden Materials auch von seiner Dicke abhängig. Die Intensität I der Strahlung in Abhängigkeit von der Absorberdicke d ist durch eine Exponentialfunktion gegeben, die auf halblogarithmischem Netz eine Gerade ergibt.

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot d} \Rightarrow \lg I = \lg I_0 - \mu \cdot \lg e \cdot d$$

Hier liegt I logarithmiert vor, d dagegen linear. Auf halblogarithmischem Netz ergibt sich also eine Gerade mit der negativen Steigung $(-\mu \cdot \lg e)$.



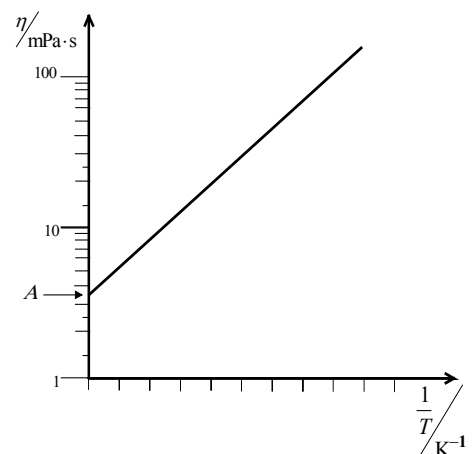
Charakteristische Größe aus dem Graphen: Die Halbwertsdicke $d_{1/2}$ bezeichnet die Materialstärke, nach deren Durchdringung die anfängliche Intensität I_0 der Strahlung auf die Hälfte gesunken ist.

Viskosität:

Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität vieler Flüssigkeiten wird durch nachfolgende Exponentialfunktion mit positivem Exponenten beschrieben. Durch die Logarithmierung der Gleichung erkennt man, dass die Funktion $\eta = f(T)$ auf keinem der populären Netze eine Gerade ergibt. So greift man häufig auf einen kleinen Trick zurück, indem die Abhängigkeit $\eta = f(T^{-1})$ gebildet, also einer Achse $(1/T)$ als Variable zugeordnet wird. Dann ergibt sich eine Geradendarstellung auf halblogarithmischem Netz.

$$\eta = A \cdot e^{\frac{B}{T}} \Rightarrow \lg \eta = \lg A + B \cdot \lg e \cdot \left(\frac{1}{T}\right)$$

Der positive Faktor $(B \cdot \lg e)$ bestimmt die Steigung der Geraden.



(Dieses Thema wird durch Übungen unterstützt: Seite 44.)

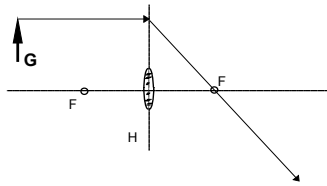
7. Zur Geometrischen Optik

Die Abbildung eines Gegenstandes G (in den Skizzen durch einen Pfeil symbolisiert) mittels einer Linse kann durch einfache geometrische Konstruktionen bestimmt werden, wenn vom tatsächlichen Verlauf des Lichtes durch die Linse abgesehen wird. Dabei bedient man sich der nachfolgenden Vorgehensweisen. Der Hauptebene H der Linse kommt dabei besondere Bedeutung zu. Eine Darstellung der Linse erfolgt lediglich, um auf anschauliche Weise Sammel- von Zerstreuungslinsen zu unterscheiden. Bei Zerstreuungslinsen handelt es sich darum, virtuelle (= durch Konstruktion bestimmte) Brennpunkte, Brennweiten und Bilder zu konstruieren. Virtuelle Bilder können nie auf z. B. einem Schirm abgebildet werden.

Bildkonstruktion für die Sammellinse

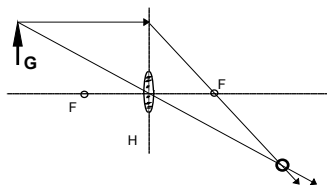
1. Parallel zur optischen Achse laufende Strahlen schneiden diese im Brennpunkt.

Damit der Bildort der Pfeilspitze festgelegt werden kann, bedarf es mindestens eines zweiten Konstruktionsstrahles.

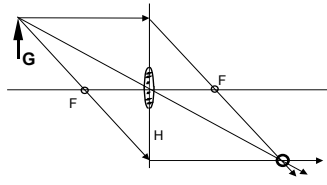


2. Strahlen, die durch den Mittelpunkt der Linse gehen (Schnittpunkt der optischen Achse mit der Hauptebene), verändern ihre Richtung nicht.

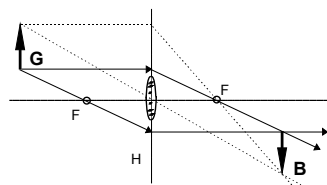
Ein dritter Konstruktionsstrahl ist überflüssig, da durch den Schnittpunkt zweier Strahlen der reelle Bildpunkt der Pfeilspitze gefunden ist.



3. Ein durch den Brennpunkt gehender Strahl wird zum Parallelstrahl. Dabei handelt es sich um die Umkehrung des Prinzips wie es unter Punkt 1 angewandt wurde; es ist eine Folge des allgemeinen Prinzips von der Umkehrbarkeit des Lichtweges.



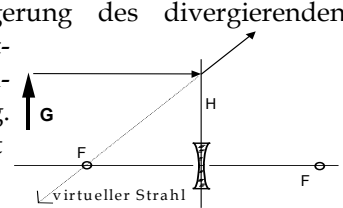
Im Beispiel wurde die Pfeilspitze reell abgebildet. Die Konstruktion des reellen Bildpunktes für den Fußpunkt des Pfeils folgt auf die gleiche Weise:



Es wurden jetzt nur zwei Strahlen zur Konstruktion verwendet.

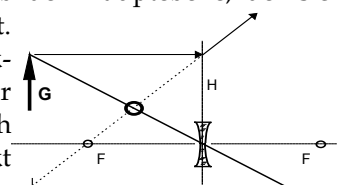
Bildkonstruktion für die Zerstreuungslinse

1. Parallel zur optischen Achse laufende Strahlen divergieren ab der Hauptebene und bilden durch rückwärtige Verlängerung des divergierenden Strahles einen Schnittpunkt mit der optischen Achse, den sog. virtuellen Brennpunkt

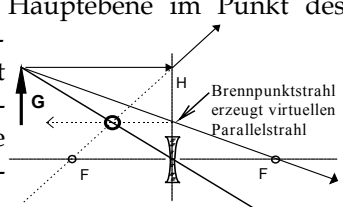


2. Strahlen, die durch den Mittelpunkt der Linse gehen, werden nicht gebrochen. Der Konstruktionsstrahl ist die rückwärtige Verlängerung des Mittelpunktstrahles ab der Hauptebene, der sich mit ihm selbst deckt.

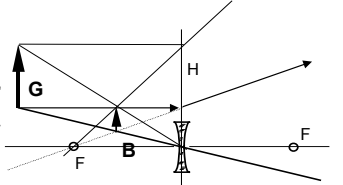
Der dritte Konstruktionsstrahl ist wieder überflüssig, da durch den Schnittpunkt zweier Strahlen der virtuelle Bildpunkt der Pfeilspitze gefunden ist.



3. Ein durch den abgewandten Brennpunkt gehender Strahl schneidet die Hauptebene im Punkt des rückwärtigen Parallelstrahls. Es handelt sich um die Umkehrung des Prinzips, wie es unter Punkt 1 angewandt wurde.



Im Beispiel wurde die Pfeilspitze virtuell abgebildet. Die Konstruktion des virtuellen Bildpunktes für den Fußpunkt des Pfeils folgt auf die gleiche Weise:



Es wurden jetzt nur zwei Strahlen zur Konstruktion verwendet.

Bemerkungen:

- Steht der Pfeil (Gegenstand) senkrecht auf der optischen Achse, dann entfällt die Konstruktion für den Fußpunkt, da auch das Bild senkrecht auf der optischen Achse stehen muss. Bei schräg auf der optischen Achse stehenden Gegenständen, wähle man sich einen Hilfspunkt auf etwa der halben Höhe des Pfeils.
- Setzt man eine Blende dicht vor die Linse, so beeinflusst diese **nicht** die Bildkonstruktion.

Merkhilfe: \Rightarrow Parallelstrahl wird zum Brennpunktstrahl

\Rightarrow Brennpunktstrahl wird zum Parallelstrahl

\Rightarrow Mittelpunktstrahl wird nicht gebrochen (Dieses Thema wird durch Übungen unterstützt: Seite 46.)

8. Zur Elektrotechnik

Wichtige Größen

Stromstärke

Basisgröße im internationalen Einheitensystem. Erlaubt eine quantitative Aussage über die Bewegung / den Transport von elektrischen Ladungen.

Einheit: $[I] = \text{A}$ (Ampere)

- Ein Ampere ist die Stärke eines elektrischen Stromes, der durch zwei geradlinige parallele Leiter mit einem Abstand von einem Meter fließt und zwischen den Leitern je Meter Länge eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ bewirkt. Technische Stromrichtung von Plus nach Minus (historische Gründe), also entgegen der Bewegung von Elektronen in einem Leiter.

Spannung

Ursache des elektrischen Stromes, erzeugt durch asymmetrische Ladungsverteilung.

Einheit: $[U] = \frac{\text{W}}{\text{A}} = \text{V}$ (Volt)

- 1V = Spannung zwischen zwei Punkten eines Leiters, in dem bei 1A eine Leistung von 1W umgesetzt wird.

Ladung

Auch Elektrizitätsmenge; Produkt aus Stromstärke und Zeit $Q = I \cdot t$.

Einheit: $[Q] = \text{A} \cdot \text{s} = \text{C}$ (Coulomb) (z.B.: $e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$)

- Bei der elektrischen Ladung handelt es sich um eine fundamentale Eigenschaft von Elementarteilchen, die deshalb auch eine ungeteilte Einheit bekommt ($\text{C} = \text{Coulomb}$). Dennoch ist es in der Elektrotechnik üblich, mit *Amperesekunde* zu rechnen.

Kapazität

Das Verhältnis der einem Körper (z.B. Kondensator) durch ein Volt Spannung zugeführten elektrischen Ladung heißt Kapazität:

Einheit: $[C] = \frac{\text{C}}{\text{V}} = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}} = \text{F}$ (Farad)

- Wegen häufigem Missverständnis (Prüfungsfrage):
Die Kapazität eines Kondensators ist keine Funktion der Spannung! (Ebenso wenig, wie der Ohmsche Widerstand von der Spannung abhängt). Bei Erhöhung einer angelegten Spannung vergrößert sich die Ladung des Kondensators, nicht seine Kapazität, da die ja auf ein Volt normiert ist!

Widerstand

Verhältnis von Spannung zwischen zwei Leiterpunkten zur Stärke des Stromes im Leiter. Der Widerstand bestimmt also bei vorgegebener Spannung die Stromstärke. $G := 1/R$ heißt Leitwert und wird in Siemens ($\text{S} = \Omega^{-1}$) gemessen.

Einheit: $[R] = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega$ (Ohm)

Induktion

Elektromagnetische Induktion ist die Erregung von elektrischen Spannungen bzw. Strömen durch veränderliche Magnetfelder.

$$\text{Einheit:} \quad [\vec{B}] = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \text{T} \quad (\text{Tesla}) \quad (U = -B \cdot l \cdot v)$$

Selbstinduktion

Durch einen einzelnen Stromkreis greift ein Induktionsfluss Φ hindurch, der von seinem eigenen Magnetfeld herrührt, er ist der jeweiligen Stromstärke proportional:

$$\Phi = L \cdot I$$

Die Proportionalitätskonstante L heißt Selbstinduktion oder Induktivität. Sie ist eine Funktion der Leitergestalt und der Permeabilität (Durchlässigkeit, hier für den Magnetfluss) des umgebenden Mediums, charakterisiert also z.B. eine konkrete Spule.

$$\text{Einheit:} \quad [L] = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} = \text{H} \quad (\text{Henry})$$

- Die Geschwindigkeit der Änderung der Stromstärke (dI/dt , Einheit A/s) bewirkt die elektrische Spannung in Volt. Die Induktion ist also eine Größe, die auf eine „Geschwindigkeit“ normiert ist (Spannung pro ein A/s = $[dI/dt]$); in der Einheit ist das nur verdeckt zu sehen, kann aber gut als Beispiel für diejenigen Fälle stehen, in denen aus Einheiten nur indirekt die Herkunft und damit der Charakter der Größe zu erkennen ist.

Zusammenfassung elektrischer Einheiten:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Watt} &= 1 \text{ Volt} \cdot 1 \text{ Ampere} & W &= V \cdot A \\ 1 \text{ Ohm} &= 1 \frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}} & \Omega &= \frac{V}{A} \\ 1 \text{ Farad} &= 1 \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} & F &= \frac{C}{V} \\ 1 \text{ Henry} &= 1 \frac{\text{Volt} \cdot \text{Sekunde}}{\text{Ampere}} & H &= \frac{V \cdot s}{A} \\ 1 \text{ Tesla} &= 1 \frac{\text{Volt} \cdot \text{Sekunde}}{\text{Fläche}} & T &= \frac{V \cdot s}{\text{m}^2} \\ 1 \text{ Coulomb} &= 1 \text{ Amperesekunde} & C &= A \cdot s \end{aligned}$$

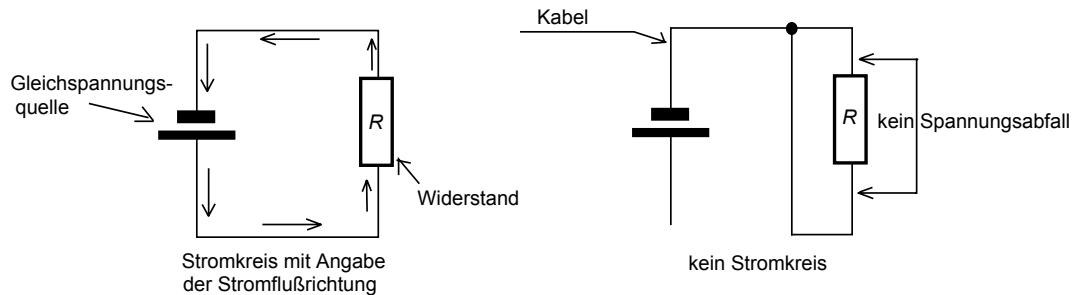
Zusammenhang zu mechanischen Einheiten durch:

$$1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ W} \cdot \text{s}$$

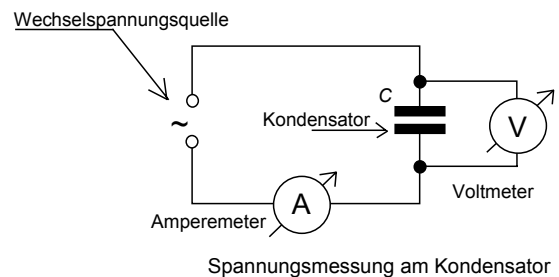
Praktische Hinweise

- Eine elektrische Schaltung** liegt vor, wenn mehrere elektronische Elemente (z. B. durch Kabel) miteinander elektrisch leitend verbunden sind. In einer Schaltungszeichnung sind die elektrischen Verbindungen durch gerade Linien idealisiert dargestellt; Verbindungen untereinander werden durch einen „Dickpunkt“ markiert. Als Spannungsgenerator kann im einfachsten Fall eine Batterie verwendet werden, aber z. B. auch ein Frequenzgenerator, der Wechselspannungen liefert. Für die Darstellung der elektronischen Bauteile haben sich bestimmte Symbole eingebürgert.

- **Ein Stromkreis** Besteht nur dann, wenn der elektrische Strom von einem Pol einer Spannungsquelle zu dem elektrischen Bauteil gelangt und über das Bauteil zum anderen Pol der Spannungsquelle zurückkommt.



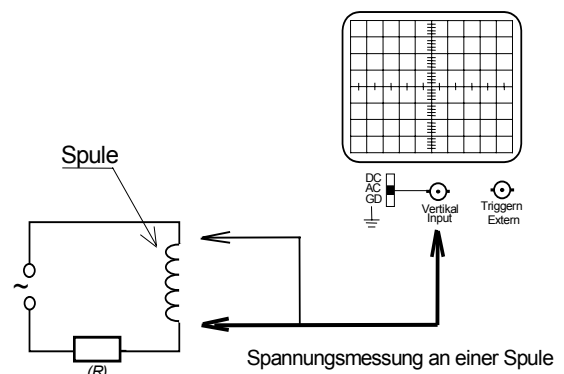
- **Messungen** an Bauteilen der Schaltung sind hauptsächlich für Strom- und Spannungsmessungen von Bedeutung. Strommessungen werden mit dem Amperemeter durchgeführt, Spannungsmessungen mit dem Voltmeter. Für beide Messungen stehen sog. Multimeter zur Verfügung, in denen beide Gerätearten vereinigt sind. Durch einfaches Umschalten wird zwischen den Messarten und zusätzlich zwischen Messungen bei Gleichstrom/-spannung und Wechselstrom/-spannung gewählt.
- **Bei Strommessungen** wird das Amperemeter in den Stromkreis „eingeschleift“; man muss sich also am Stromfluss und am Leitungsverlauf orientieren.
- **Bei Spannungsmessungen** wird das Voltmeter an den Enden eines Bauteiles angeschlossen, weil bei Stromfluss nur an Bauteilen Spannungen abfallen können, also Spannungsunterschiede messbar sind; man muss sich also an Bauteilen orientieren.



- Auch das Oszilloskop benötigt als Spannungsmesser ein Bauteil, an dem eine zu messende Spannung abfällt. Das kann beispielsweise sein: Ohmscher Widerstand, Kondensator, Spule, Diode etc.

An einem elektrischen Element fällt nur dann eine elektrische Spannung ab, wenn eine Gleich- oder Wechselspannung zur Verfügung steht, das Bauteil in den Stromkreis eingebunden ist und durch das Bauteil ein Strom fließt.

- **Schrittweiser Messaufbau:**
Am einfachsten hat man es beim Aufbau einer Schaltung, wenn man systematisch vorgeht; also erst den Stromkreis und danach die Verbindungen zum Messgerät herstellt.



1. Vom Spannungsgenerator (= Spannungserzeuger) zum Bauteil Verbindungen herstellen, damit ein Stromkreis entsteht. In den Stromkreis kann auch ein weiteres charakteristisches Bauteil (Spule, Kondensator, Diode, ...) eingefügt werden, das die elektrischen Verhältnisse und damit die Messung am primären Bauteil beeinflusst.
2. Verbindung von Bauteil zum Oszilloskop herstellen und gegebenenfalls Leitungen für weitere Anschlüsse eines Messgerätes vorsehen. Bei manchen Schaltungen ist eine Seite des Bauelementes durch den Generator geerdet; dann muss die Erdung des Oszilloskops (dünnes Kabel) an die Erdseite des Bauelementes angeschlossen werden, um doppelte Erdung zu vermeiden.

Widerstand

BEZEICHNUNG der Impedanz eines Ohmschen Widerstandes:

$$\text{---} \boxed{\text{---}} \text{---} \quad Z_R = R$$

DEFINITION:

$$R = \frac{U}{I} \quad [R] = \frac{V}{A} = \Omega$$

R gibt an, bei welcher Spannung **ein Ampere** Strom durch den Widerstand fließt.

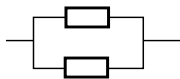
Ströme sind bei **Reihenschaltung** gleich:



$$R_g = \frac{U_g}{I} = \frac{U_1 + U_2}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I}$$

$$R_g = R_1 + R_2 \xrightarrow{\text{allgemein}} R_g = \sum_i R_i$$

Spannungen sind bei **Parallelschaltung** gleich



$$R_g = \frac{U}{I_g} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{U}{\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \xrightarrow{\text{allgemein}} \frac{1}{R_g} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

Frage: Hängt der Ohmsche Widerstand von der Größe der Spannung oder gar des Stromes ab?

Kondensator

BEZEICHNUNG der Impedanz eines Kondensators:

$$\text{---} \parallel \parallel \text{---} \quad Z_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

DEFINITION:

$$C = \frac{Q}{U} \quad [C] = \frac{A \cdot s}{V}$$

C gibt an, wie viel Ladung sich **bei einem Volt** angelegter Spannung im Kondensator ansammelt.

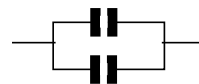
Ladungen sind bei **Reihenschaltung** gleich:



$$U_g = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\frac{U_g}{Q} = \frac{1}{C_g} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \xrightarrow{\text{allgemein}} \frac{1}{C_g} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Spannungen sind bei **Parallelschaltung** gleich:



$$C_g = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} = C_1 + C_2 \xrightarrow{\text{allgemein}} C_g = \sum_i C_i$$

Frage: Hängt die Kapazität eines Kondensators von der Größe der an ihn angelegten Spannung ab?

Spule

BEZEICHNUNG der Impedanz einer Spule:

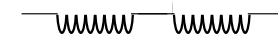
$$\text{---} \text{~~~~~} \text{---} \quad Z_L = \omega \cdot L$$

DEFINITION:

$$L = \frac{U}{\frac{dI}{dt}} \quad [L] = \frac{V \cdot s}{A} = H$$

L gibt an, wie viel induzierte Spannung in der Spule erzeugt wird, wenn die Stromänderungsgeschwindigkeit **ein Ampere pro Sekunde** ist.

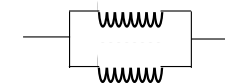
Ströme sind bei **Reihenschaltung** gleich:



$$L_g = \frac{U_g}{dI/dt} = \frac{U_1 + U_2}{dI/dt} = \frac{U_1}{dI/dt} + \frac{U_2}{dI/dt}$$

$$L_g = L_1 + L_2 \xrightarrow{\text{allgemein}} L_g = \sum_i L_i$$

Spannungen sind bei **Parallelschaltung** gleich:



$$L_g = \frac{U}{dI_g/dt} = \frac{U}{dI_1/dt + dI_2/dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{L_g} = \frac{dI_1/dt + dI_2/dt}{U} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

$$\xrightarrow{\text{allgemein}} \frac{1}{L_g} = \sum_i \frac{1}{L_i}$$

Frage: Hängt die Induktivität einer Spule von der Größe des durch sie fließenden Stromes ab?

9. Übungen zum Umgang mit Gleichungen

1. Rechenstufe

Auf die Erläuterung der ersten Rechenstufe (+/-) kann hier verzichtet werden; ebenso wie auf eine ausführliche Sammlung von Übungen. Daher nur zur Erinnerung:

Übungen (Zusammenfassen von Ausdrücken):

(Verschachtelte Klammern löst man von innen nach außen auf)

$$5a - (13a + 15b) + (13b - 7a) =$$

$$a + b + c + d - [(d + a) - (b + c - a)] =$$

2. Rechenstufe

Auf die Erläuterung der zweiten Rechenstufe (\times/\div) kann hier verzichtet werden; ebenso wie auf eine ausführliche Sammlung von Übungen. Daher eine Auswahl zur Erinnerung:

Übungen

[Punktrechnung vor Strichrechnung]

$$(-5) \cdot (-x + 2y) =$$

$$(-3a) \cdot (4x - 4y) =$$

$$(y - 9) \cdot (x - 4) =$$

$$(n - 3) \cdot (a + 5) =$$

[Ausklammern, z. B. : $bx - b = b(x - 1)$]

$$ax - ay + az =$$

$$5bx - bx - 15bx =$$

$$(a - b) \cdot x + (a - b) \cdot y =$$

$$am + bm - cm + xm =$$

$$(4n + 3m) \cdot b + 4n + 3m =$$

$$(c + 3d) \cdot 4a - c - 3d =$$

[Kürzen, zB. : $\frac{54ax}{9x} = 6a$]

$$\frac{(a + n) \cdot 3x}{15ax \cdot (a + n)} =$$

$$- \frac{(3a + n) \cdot (b - c)}{c - b} =$$

[Dividieren, zB. : $(32ab + 16ac) : (4b + 2c) = 8a$]

$$(39n + 26x - 91z) : (3n + 2x - 7z) =$$

$$(70ac - 90bc) : (14a - 18b) =$$

$$(70ac - 90bc) : (14a - 18b) =$$

$$(cx + cy + dx + dy) : (x + y) =$$

Auflösen von Gleichungen nach einer Größe

Um Gleichungen nach einer Variablen aufzulösen, werden meist Rechenoperationen (der ersten, zweiten und dritten Rechenstufe) symmetrisch derart auf beide Seiten der Gleichung angewandt, dass die gewünschte Variable schrittweise separiert wird.

Übungen (nach x auflösen):

$$x - 5 = 2$$

$$x + 3 = 8$$

$$3x + 6 = 18$$

$$8 + 4x = 32$$

$$3x + 3 + 8 = x + 21$$

$$\frac{3x}{4} - 7 = 11$$

$$\frac{3x}{5} + 4 = 25$$

$$-15 = \frac{18}{x} - 6$$

$$\frac{6}{x} + 5 = 41$$

$$c = \frac{2x}{b} + 1$$

$$\frac{8}{x} = \frac{10}{x} - 2$$

$$\frac{a-b}{x} = \frac{a^2-b^2}{ax+b}$$

$$\frac{a+b}{x+1} = \frac{x+y}{d+c}$$

$$\frac{d}{x} = \frac{f}{f+a}$$

Nach den verlangten Größen auflösen

$$U = d \cdot \pi;$$

$$d = ?$$

$$F = m \cdot a; \quad a = ?$$

$$M = \frac{d \cdot \pi \cdot s}{2};$$

$$d = ?; s = ?$$

$$M = \frac{D+d}{2} \cdot \pi \cdot s; \quad D = ?; d = ?; s = ?$$

$$N = \frac{P \cdot r \cdot b}{k \cdot l} + \frac{A \cdot x}{T}; \quad A = ?; T = ?; P = ?; k = ?$$

$$V = \frac{F+G}{2} \cdot h; \quad G = ?; h = ?$$

$$\Delta I = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot \Delta p; \quad \frac{\Delta p}{\Delta I} = ?; L = ?$$

$$F = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta \cdot v + \rho \cdot g \cdot V; \quad r = ?; V = ?$$

$$D = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}; \quad n_D = ?; n_C = ?$$

$$c = \lambda \cdot v; \quad \lambda = ?$$

Brüche werden miteinander dividiert, indem der erste Bruch mit dem reziproken Wert des zweiten multipliziert wird.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Andere Notation, gleiches Ergebnis:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Übungen

$$\frac{2a}{5c} : \frac{2b}{10d} =$$

$$\frac{a+a}{c \cdot d} : \frac{2b}{3d} =$$

$$\frac{(x+y)^2}{a+b} : \frac{x+y}{(a+b)^2} =$$

$$\frac{\frac{xy}{a^2}}{\frac{x}{a}}$$

$$\frac{\frac{A \cdot x}{B}}{C}$$

$$\frac{\frac{A \cdot x}{B}}{C}$$

3. Rechenstufe

Übliche Schreibweisen von ganzzahligen und gebrochenen Exponenten:

$$a^x \equiv \frac{1}{a^{-x}}; \quad a^{-x} \equiv \frac{1}{a^x} \quad a^{x+y} \equiv \frac{1}{a^{-(x+y)}} = \frac{1}{a^{-x-y}}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \quad a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a} \quad a^{-\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}^{-1} = \frac{1}{\sqrt[x]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{x}}}$$

Potenzen und Wurzeln

Die folgenden Operationen gelten auch für gebrochene Potenzen, den sogenannten Wurzeln, wie z. B. $1/3$. Eine getrennte Darstellung erübrigt sich daher.

Addition von Potenzen ist nur möglich, $a^2 + a^4 + 2a^2 = 3a^2 + a^4$
wenn Basis und Exponent gleich sind. $a + b^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 2b^2 + b^3 = a + a^2 + 4b^2 + b^3 + c^2$

Multiplikation von Potenzen durch Addition
der Exponenten ist nur bei gleicher Basis möglich.
(Exponent egal)

$$\begin{aligned} a \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b^5 &= a^{1+2} \cdot b^{2+5} = a^3 \cdot b^7 \\ \frac{a^3 \cdot b \cdot c^2}{c \cdot b^2 \cdot a^2} &= a^3 \cdot b \cdot c^2 \cdot c^{-1} \cdot b^{-2} \cdot a^{-2} = \\ &= a^{3-2} \cdot b^{1-2} \cdot c^{2-1} = a \cdot b^{-1} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} \end{aligned}$$

Potenzieren von Potenzen erfolgt, indem die
Exponenten multipliziert werden.
(Exponent und Basis egal)

$$\begin{aligned} (a^2)^3 &= a^{2 \cdot 3} = a^6 \\ (a^4 \cdot b \cdot c^2)^3 &= a^{4 \cdot 3} \cdot b^{1 \cdot 3} \cdot c^{2 \cdot 3} = a^{12} \cdot b^3 \cdot c^6 \end{aligned}$$

Übungen (Addieren/ Multiplizieren/ Potenzieren von Potenzen und Wurzeln):

$$b^5 + b^5 + b^5 + b^5 + b^5 = \quad 4a^4 + 3a^4 + 2a^{\frac{1}{2}} + 10a^{\frac{1}{2}} =$$

$$3ax^2 + 12ax^2 + 4a^2x + a^2x + ax = \quad \frac{2a^2}{b} + \frac{4a^2}{b} + \frac{3a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} =$$

$$3a \cdot a^2 =$$

$$n^4 \cdot n^7 =$$

$$5a^2 \cdot n \cdot 6a^3 \cdot n^7 =$$

$$x^2 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot y^3 \cdot 2y^2 =$$

$$\frac{3a^4 \cdot b}{2a^3 \cdot b^2} =$$

$$x^{3a} \cdot x =$$

$$(a^2 \cdot b)^2 =$$

$$(3x^3 \cdot y^{-1})^3 =$$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{4x}{5y}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{nx}{ab}\right)^c =$$

$$(e \cdot E)^{\frac{2}{3}} =$$

3. Rechenstufe auf Gleichungen angewandt: (nach x umstellen durch Potenzoperationen)

$$y = x^a \quad \Rightarrow \quad y^{\frac{1}{a}} = x ; \quad y = \frac{b}{x^a} \quad \Rightarrow \quad x^a = \frac{b}{y} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{b}{y}\right)^{\frac{1}{a}} \equiv \sqrt[a]{\frac{b}{y}}$$

Übungen (nach x auflösen):

$$y = x^2$$

$$y = x^{(3+1)}$$

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$y = (x^2)^3$$

$$\sqrt{y} = x^2$$

$$\frac{1}{y} = (x^n)^m$$

$$(a \cdot b^2 \cdot c^3)^2 = (2 \cdot x^2)^3$$

$$P = \sqrt[3]{x} - 3 \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{\sqrt{x^2}} \text{ (Überraschung)}$$

$$y^2 = \left(\frac{x^3}{x^n}\right)^m$$

Logarithmen

Schreibweisen, wenn die gesuchte Größe der Exponent ist:

- Umformen einer Gleichung in logarithmische Schreibweise heißt, die Gleichung logarithmieren.
- Bei zusammengesetzten Ausdrücken wird geklammert ($A \cdot B \rightarrow \log(A \cdot B)$).
- Die Auflösung der Klammern geschieht durch Vorsetzen des Logarithmus vor jede Größe und Verringern der Verknüpfung um eine Rechenstufe; demnach können natürlich die Verknüpfungen der ersten Rechenstufe (\pm) nicht aufgelöst werden.

Beispiele (dekadisches Logarithmieren):

$$y = a + b \Rightarrow \lg y = \lg(a + b) \quad \leftarrow \text{(hier ist keine weitere Entwicklung möglich)}$$

$$y = a \cdot b \Rightarrow \lg y = \lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b \qquad y = \frac{a}{b} \Rightarrow \lg y = \lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$$

$$y = x^a \Rightarrow \lg y = \lg x^a = a \cdot \lg x \qquad \lg y = \lg \sqrt[a]{x} \Rightarrow \lg x^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} \lg x \stackrel{\text{bzw.}}{=} \frac{\lg x}{a}$$

Übungen

Gleichungen dekadisch logarithmieren:

(Ziel: Nach einiger Übung kann man die Lösungen ohne Zwischenschritte hinschreiben)

$$\eta = \varepsilon \cdot \lambda + \vartheta \qquad c = a \cdot \frac{f}{g}$$

$$y = y_0 \cdot e^x \qquad y = y_0 \cdot 10^x$$

$$P = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4 \qquad \eta = A \cdot e^{\frac{B}{\eta}}$$

$$I = I_0 \cdot e^{\mu \cdot t} \qquad I = I_0 \cdot 10^{\mu \cdot t}$$

$$V = \frac{a \cdot b^2}{r^4 \cdot \eta} \qquad N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Gleichungen natürlich logarithmieren (aus $a = b \cdot c$ wird $\ln a = \ln b + \ln c$)

$$y = y_0 \cdot e^x \quad y = y_0 \cdot 10^x \quad P = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4 \quad \eta = A \cdot e^{\frac{B}{\eta}}$$

$$I = I_0 \cdot e^{\mu \cdot t} \quad I = I_0 \cdot 10^{\mu \cdot t} \quad V = \frac{a \cdot b^2}{r^4 \cdot \eta} \quad N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Je nach Gelegenheit dekadisches oder natürliches Logarithmieren der Gleichung, nach x auflösen

$$A = B^x \quad R = T^x \quad y = (A \cdot B)^x \quad y = A \cdot B^x$$

$$V = \frac{A^x}{B} \quad A = B + C^x \quad y = e^x \quad y = A \cdot e^x$$

$$A = B^{a \cdot x} \quad \eta = e^{-x} \quad \eta = e^{\frac{A}{x}} \quad \frac{U_1}{U_2} = e^{-\tau \cdot x}$$

Einfache Ausdrücke "auslogarithmieren"

$$\lg(a \cdot b) = \quad \lg(a \cdot b \cdot c) = \quad \lg(a \cdot b \cdot c \cdot d) =$$

$$\lg \frac{a}{b} = \quad \lg \frac{1}{a} = \quad \lg \frac{a}{1} =$$

$$\lg \frac{a \cdot b}{c} = \quad \lg \frac{a}{b \cdot c} = \quad \lg \frac{a \cdot b}{c \cdot d} =$$

$$\lg a^b = \quad \lg b^c = \quad \lg a \cdot b^c =$$

$$\lg \frac{a^b}{c} = \quad \lg \frac{a}{b^c} = \quad \lg \left(\frac{a}{b} \right)^c =$$

$$\lg \frac{x \cdot y \cdot z}{\eta \cdot T^4} = \quad \lg \frac{p \cdot \pi \cdot r^2}{\eta \cdot T^4} =$$

Entlogarithmieren von Gleichungen

Nun die Umkehrung des Logarithmierens von Gleichungen.

Entlogarithmierung lebt von den nebenstehenden Beziehungen, die auch auf Gleichungen angewendet werden.

$a^x = N \Rightarrow x = \log_a N$	$\xrightarrow{\text{also gilt auch}}$	$a^{\log_a N} = N$
Für die dekadische Basis gilt :		
$10^x = N \Rightarrow x = \lg N$	$\xrightarrow{\text{also gilt auch}}$	$10^{\lg N} = N$
Für die Basis e des natürlichen Logarithmus gilt :		
$e^x = N \Rightarrow x = \ln N$	$\xrightarrow{\text{also gilt auch}}$	$e^{\ln N} = N$

Beispiele

$$\lg P = 4 \cdot \lg A \Rightarrow 10^{\lg P} = 10^{4 \cdot \lg A} = 10^{\lg A^4} \Rightarrow P = A^4$$

$$\ln R = \varepsilon \cdot \ln T \Rightarrow e^{\ln R} = e^{\varepsilon \cdot \ln T} = e^{\ln T^\varepsilon} \Rightarrow R = T^\varepsilon$$

$$\lg I = \lg A + \lg \eta - \lg \lambda = \lg \frac{A \cdot \eta}{\lambda} \Rightarrow 10^{\lg I} = 10^{\lg \frac{A \cdot \eta}{\lambda}} \Rightarrow I = \frac{A \cdot \eta}{\lambda}$$

Übungen

(Ziel: Nach einiger Übung kann man die Lösungen ohne Zwischenschritte hinschreiben)

$$\lg I = x \cdot \lg A$$

$$\ln I = x \cdot \ln A$$

$$\lg P = \lg E + 2$$

$$\lg I = \lg I_0 + \lg e$$

$$\lg I = \lg I_0 + x \cdot \lg e$$

$$\lg A = \lg B + \lg C - \lg D$$

$$\lg E = \lg A + B$$

$$\ln E = \ln A + C$$

$$\ln W = \ln U + \ln I$$

$$\lg F = 3 + \lg A + 4 \cdot \lg T$$

High - end - Aufgabe mit Fischers Z , nach r auflösen:

$$Z = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+r}{1-r} \xrightarrow{\text{Lösung}} r = \frac{e^{2Z} - 1}{e^{2Z} + 1}$$

10. Zusatzübungen

Der Dreisatz

Sein Prinzip liegt in drei Schritten, durch die von einer bekannten Relation eine noch unbekannte Relation ermittelt wird. Dabei handelt es sich zumeist um Beziehungen zwischen Größen mit unterschiedlicher Einheit; es verbietet sich also eine Gleichung hinzuschreiben, verwendet wird das „Entsprichtzeichen“.

1. bekannte Relation hinschreiben (Relationen werden wie Gleichungen behandelt)
2. abhängige Größe auf ihre Einheit normieren
3. Gleichung (Relation) mit dem geforderten Wert der abhängigen Größe multiplizieren

Beispiele

1. Ein Bäuerlein panscht in seinen Wein in je 120ℓ eine Zuckermasse von 70g.
Wie viel Zucker braucht es für 848ℓ Wein?

1. $120\ell \hat{=} 70\text{g}$
2. $\frac{120\ell}{120} = 1\ell \hat{=} \frac{70\text{g}}{120}$ (Schritt 2 muss gar so ausführlich nicht hingeschrieben werden.)
3. $848 \cdot 1\ell \hat{=} 848 \cdot \frac{70\text{g}}{120} = 494,67\text{g}$

2. Eine Assistenzärztin beabsichtigt einem Patienten 10ml eines Medikamentes in 2%-iger Konzentration zu verabreichen. Tatsächlich verfügbar ist das Medikament in einer 30%-igen Vorratslösung. Welches Volumen muss der Vorratsmenge entnommen werden, damit sich beim Auffüllen auf 10ml mit der Kochsalzlösung eine 2%-ige Konzentration des Medikamentes ergibt?

Gewählter Ansatz aus bekannter Relation:
(30%-Konzentration $\hat{=} 3\text{g}/10\text{ml}$)

$$1. \quad 3\text{g} \hat{=} 10\text{ml}$$

Normierung auf eine Einheit:

$$2. \quad 1\text{g} \hat{=} \frac{10}{3}\text{ml}$$

Ziel- Konzentration des Wirkstoffes:
(2%- Konzentration $\hat{=} 0,2\text{g}/10\text{ml}$)

$$3. \quad 0,2\text{g} \hat{=} \frac{0,2 \cdot 10}{3}\text{ml} = \underline{\underline{0,67\text{ml}}}$$

Die 0,67ml der Vorratslösung werden mit Kochsalzlösung auf 10 ml aufgefüllt.

Übungen

$$22\text{mg} \hat{=} 12\ell, \quad 12,5\text{mg} \hat{=} ? \ell$$

$$13\text{ms} \hat{=} 2\text{m}, \quad 2,5\text{ms} \hat{=} ? \text{m}$$

$$200\text{kJ} \hat{=} 12\text{g}, \quad 250\text{g} \hat{=} ? \text{kJ}$$

$$32\mu\text{m} \hat{=} 12^\circ, \quad 5,2^\circ \hat{=} ? \mu\text{m}$$

$$72\text{Skt} \hat{=} 15\text{c}\ell, \quad 100\text{Skt} \hat{=} ? \text{c}\ell$$

$$100\text{kPa} \hat{=} 750\text{Torr} \quad 810\text{Torr} \hat{=} ? \text{kPa}$$

und im Kopf zu rechnen

$$100\text{g} \hat{=} 12\text{DM}, \quad 20\text{g} \hat{=} ? \text{DM}$$

$$10\text{m}^2 \hat{=} 5\ell$$

$$25\text{m}^2 \hat{=} ? \ell$$

$$20\text{Nm} \hat{=} 80\text{m}, \quad 5\text{Nm} \hat{=} ? \text{m}$$

$$12\text{g}/\text{cm}^3 \hat{=} 36^\circ$$

$$4\text{g}/\text{cm}^3 \hat{=} ?^\circ$$

$$100\text{Skt} \hat{=} 20\text{c}\ell, \quad 6\text{Skt} \hat{=} ? \text{c}\ell$$

$$100\text{mSv} \hat{=} 750\text{kV} \quad 20\text{mSv} \hat{=} ? \text{kV}$$

Vorsätze

Grob gesagt, ist die Nomenklatur für Vorsätze in dekadischen Dreierpotenzen geordnet. Lediglich in den Potenzbereichen von 0 bis 3 und 0 bis -3 sind je zwei Vorsätze hinzugefügt.

$d = 10^{-1}$	Dezi	$1 = 10^0$	—
$c = 10^{-2}$	Zenti		
		$m = 10^{-3}$	Milli
		$\mu = 10^{-6}$	Mikro
		$n = 10^{-9}$	Nano
		$p = 10^{-12}$	Pico
		$f = 10^{-15}$	Femto
		$a = 10^{-18}$	Atto
		$z = 10^{-21}$	Zepto
		$t = 10^{-30}$	Tredo

$da = 10^1$	Deka	$1 = 10^0$	—
$h = 10^2$	Hekto		
		$k = 10^3$	Kilo
		$M = 10^6$	Mega
		$G = 10^9$	Giga
		$T = 10^{12}$	Tera
		$P = 10^{15}$	Peta
		$E = 10^{18}$	Exa
		$Z = 10^{21}$	Zetta
		$Y = 10^{30}$	Yotta

Als klausurrelevant galten bisher stets nur die Vorsätze von femto bis Tera.

Beispiel (extrem ausführlich):

Voraussetzung: Ein Liter ist per Definition ein Kubikdezimeter: $1\ell := 1\text{ dm}^3 (=1000\text{cm}^3)$

Frage: Wie viel Kubikzentimeter hat ein Zentiliter ?

Lösungsrhythmus:

1. Auflösen von Vorsätzen in Zehnerpotenzen, Zusammenfassen der Zehnerpotenzen
2. Erweitern um die Zehnerpotenz des gewünschten Vorsatzes für die Einheit
3. Zusammenfassen der verbleibenden Potenzen und schreiben als Vorsatz

$$\begin{aligned}
 1\text{c}\ell &= 1 \cdot 10^{-2} \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^{-2} (10^{-1} \text{ m})^3 = 1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 10^{-5} \text{ m}^3 = && \text{(in Zehnerpotenzen auflösen)} \\
 &= 10^{-5} \cdot (10^2 \cdot 10^{-2})^3 \text{ m}^3 = && \text{(um den erfragten Vorsatz (kubik-zenti}=(10^{-2})^3\text{) erweitern)} \\
 &= 10^{-5} \cdot 10^6 \cdot (10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 10 \cdot (10^{-2} \text{ m})^3 = 10 \cdot \text{cm}^3 && \text{(erfragten Vorsatz separieren ...)}
 \end{aligned}$$

Kurzform: $1\ell = 1000 \text{ cm}^3 \Rightarrow 1\text{c}\ell = 0,01\ell = 1000 \text{ cm}^3 / 100 = 10 \text{ cm}^3$

Übungen

$1000\ell =$ _____ m^3	$1\text{mm}^3 =$ _____ ℓ	$1\text{dm}^3 =$ _____ ℓ
$100\text{nm} =$ _____ μm	$10\mu\text{m} =$ _____ mm	$10\text{dm} =$ _____ cm
$1000\text{c}\ell =$ _____ cm^3	$10\text{cm}^3 =$ _____ $\text{d}\ell$	$1\text{d}\ell =$ _____ cm^3
$10\text{d}\ell =$ _____ mm^3	$10\text{cm}^3 =$ _____ $\text{c}\ell$	$100\text{nm} =$ _____ mm
$1000\text{cm} =$ _____ km	$10\text{dm}^3 =$ _____ $\text{d}\ell$	$1\text{c}\ell =$ _____ mm^3
$200\text{cm}^3 =$ _____ $\text{d}\ell$	$20\text{cm}^3 =$ _____ $\text{c}\ell$	$1\text{f}\ell =$ _____ ℓ
$1\text{km}^2 =$ _____ m^2	$100\text{pN} =$ _____ nN	$1\text{MV} =$ _____ kV
$1\text{c}\ell =$ _____ cm^3	$1\text{d}\ell =$ _____ cm^3	$1\ell =$ _____ cm^3

BLITZ - BLÄTTER

Die folgenden Blätter sollen Ihnen durch kurze, (blitz)schnell zu erledigende Aufgaben die Gewöhnung an mathematisch-physikalische Sachverhalte erleichtern. So fällt es z. B. manchen Studierenden schwer, sich an den Umgang mit physikalischen Größen und Vorsätzen zu gewöhnen oder sich der Vorbehalte bezüglich der Logarithmenrechnung zu entledigen, obwohl bei genauer Betrachtung keinerlei spezifische Schwierigkeiten auszumachen sind. Hier hilft dann weiter nichts, als etwas Gewöhnung.

Erkennen physikalischer Größen aus ihren Einheiten

Vervollständigen Sie die (teils redundanten) Einheitengleichungen durch die physikalische Größe. Beachten Sie dabei:

$$N = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}; \quad \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}; \quad J = \text{N} \cdot \text{m} = \text{W} \cdot \text{s}; \quad V \cdot A = W$$

(vergleiche S. 8)

Beispiele: $N \cdot s = [p]$ Impuls; $\frac{W}{m^2} = [I]$ Intensität; $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} = [W]$ Arbeit, bzw. $[E]$ Energie

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = [\quad] \quad N \cdot s = [\quad] \quad \text{Pa} = [\quad]$$

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = [\quad] \quad N \cdot \text{m} = [\quad] \quad W \cdot s = [\quad]$$

$$\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = [\quad] \quad W = [\quad] \quad \frac{W}{\text{m}^2} = [\quad]$$

$$\frac{N \cdot m}{s} = [\quad] \quad N = [\quad] \quad \frac{m}{s^2} = [\quad]$$

$$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = [\quad] \quad W \cdot s = [\quad] \quad \text{Gy} = [\quad]$$

$$\text{Sv} = [\quad] \quad \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = [\quad] \quad V \cdot A = [\quad]$$

$$V = [\quad] \quad A \cdot s = [\quad] \quad \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = [\quad]$$

$$\frac{A \cdot s}{V} = [\quad] \quad \frac{N \cdot m}{s} = [\quad] \quad V \cdot A = [\quad]$$

$$\frac{N}{\text{m}^2} = [\quad] \quad W \cdot s = [\quad] \quad \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = [\quad]$$

$$J = [\quad] \quad \frac{W}{\text{m}^2} = [\quad] \quad \text{Sv} = [\quad]$$

$$\frac{C}{V} = [\quad] \quad V \cdot A = [\quad] \quad A \cdot s = [\quad]$$

$$\frac{m}{s^2} = [\quad] \quad N \cdot m = [\quad] \quad \frac{A \cdot s}{\text{kg}} = [\quad]$$

Physikalische Einheiten analysieren und Umrechnen

$$1 \text{ Bq} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{Aktivität})$$

$$1 \text{ W} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{Leistung})$$

$$1 \text{ Sv} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{Äquivalentdosis})$$

$$1000 \ell = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^3 \quad (\text{Einheiten})$$

$$10^{-6} \text{ m} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}$$

$$10 \mu\text{m} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$$

$$1 \text{ Hz} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{Frequenz})$$

$$10 \text{ pm} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ nm}$$

$$1 \text{ km} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}$$

$$10 \mu\text{m} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ nm}$$

$$1 \text{ C} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{Ladung})$$

$$1 \text{ F} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{Kapazität})$$

$$10 \text{ Nm} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ Ws} \quad (\text{Energie/Arbeit})$$

$$100 \text{ kPa} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ Torr} \quad (\text{Einheiten})$$

$$10 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{Einheit})$$

$$10 \text{ N/m}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{Einheit})$$

$$10^3 \text{ nm} = \underline{\hspace{2cm}} \mu\text{m}$$

$$10 \text{ Pa} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ N/m}^2$$

$$100 \ell = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$$

$$10^{-6} \text{ dm} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}$$

Beispiele:

$$1 \Omega = \underline{1 \text{ V/A}} \quad (\text{Widerstandseinheit})$$

$$1 \text{ d} = \underline{86.400 \text{ s}} \quad (1 \text{ d} = 1 \text{ Tag})$$

$$1 \text{ a} = \underline{8.760 \text{ h}} \quad (1 \text{ a} = 1 \text{ Jahr})$$

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \underline{\hspace{2cm}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$1 \frac{\text{nSv}}{\text{h}} = \underline{\hspace{2cm}} \frac{\text{mSv}}{\text{a}}$$

$$1 \text{ Hz} = \underline{\hspace{2cm}} \frac{1}{\text{d}}$$

$$1 \frac{\text{mGy}}{\text{h}} = \underline{\hspace{2cm}} \frac{\text{mGy}}{\text{min}}$$

$$1 \frac{\text{mSv}}{\text{h}} = \underline{\hspace{2cm}} \frac{\text{mSv}}{\text{min}}$$

$$1 \text{ kW} \cdot \text{h} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ W} \cdot \text{s}$$

$$1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\hspace{2cm}} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ Pa}$$

Übungen mit dem Taschenrechner

Potenzen und Wurzeln (=Größen mit gebrochenen Potenzen):

$$10^{0,3} = \quad 10^{1,5} = \quad 10^{2,7} = \quad 10^{3,2} =$$

$$3^{2,5} = \quad 2,5^3 = \quad \pi^2 = \quad e^\pi =$$

$$1,5^{\frac{1}{3}} = \quad 3,5^{\frac{1}{3}} = \quad 4^{\frac{1}{3}} = \quad 5^{\frac{1}{3}} =$$

$$1,5^{\frac{3}{4}} = \quad 3,5^{\frac{3}{4}} = \quad 4^{\frac{3}{4}} = \quad 5^{\frac{3}{4}} =$$

Winkelfunktionen:

$$\sin 0^\circ = \quad \sin 30^\circ = \quad \sin 45^\circ = \quad \sin 90^\circ =$$

$$\cos 0^\circ = \quad \cos 45^\circ = \quad \cos 60^\circ = \quad \cos 90^\circ =$$

$$\sin 270^\circ = \quad \cos 270^\circ = \quad \cos 30^\circ = \quad \sin 60^\circ =$$

$$\sin \alpha = 0,5 \quad \alpha = \quad \sin \alpha = 0,23 \quad \alpha = \quad \sin \alpha = -1 \quad \alpha =$$

$$\sin \alpha = -0,9 \quad \alpha = \quad \cos \alpha = -0,94 \quad \alpha = \quad \tan \alpha = 0,5 \quad \alpha =$$

Lösungen:

$$1,995 / 31,623 / 501,187 / 1584,893$$

$$15,588 / 15,625 / 9,8696 / 23,141$$

$$1,14 / 1,52 / 1,59 / 1,71$$

$$1,36 / 2,56 / 2,83 / 3,34$$

$$0 / 0,5 / 0,707 / 1$$

$$1 / 0,707 / 0,5 / 0$$

$$-1 / 0 / 0,866 / 0,866$$

α :

$$30^\circ / 13,3^\circ / -90^\circ$$

$$-64,16^\circ / 160,05^\circ / 26,57^\circ$$

Hinweise:

- Ist der Winkel in Grad angegeben, muss auf dem Taschenrechner DEG stehen (Vollkreiswinkel = 360°).
- Wird der Winkel im Bogenmaß angegeben, muss dort RAD stehen (Vollkreiswinkel = $2\pi \approx 6,28$).
- Wird in Neugraden gemessen (nicht mehr üblich), muss dort GRA stehen (Vollkreiswinkel = 400^g).
- Bei der Ermittlung der Winkel wird die inverse Winkelfunktion angewendet.

Statistische Funktionen

Es werden im Praktikum ausschließlich der arithmetische Mittelwert und seine Standardabweichung verwendet. Die eingebauten Funktionen der Taschenrechner beschränken sich dabei (soweit bekannt) auf die Ermittlung der Standardabweichung der Einzelmessung, bezeichnet mit der Taste $\sigma(n-1)$, bzw. $\sigma(n)$. Damit bleibt dann noch durch \sqrt{n} bzw. $\sqrt{n-1}$ zu dividieren (siehe auch S. 15).

Beispiel für Bedienung mit den CASIO fx-82 Modellen:

Tasten	Wirkung
$\text{MODE} - \blacksquare$ oder $\text{MODE} - 2$	Statistikmodus einschalten: SD (standard deviation = standardabweichung) (Tastenbelegung variiert je nach Modell)
$8,5 - \text{M+}$ $6,5 - \text{M+}$ usw.	Dateneingabe wie z. B. Tabelle 1
\overline{x}	mit Shift und der entsprechenden Taste zu erreichen: gibt den Mittelwert \bar{x}
σ_{n-1}	mit Shift und der entsprechenden Taste zu erreichen: zeigt Fehler der Einzelmessung
$\div - \sqrt{} - =$ oder $\div - \sqrt{} - \sqrt{} - =$	für: geteilt durch Wurzel aus 7 ist gleich, gibt damit die Standardabw. des Mittelwerts. (Tastenbelegung variiert je nach Modell)
$\text{Shift} - \text{AC}$	Alles löschen für die nächste Datenreihe (oder Normalmodus mit $\text{MODE} - 0$ od. 1)

Tabelle 1

i	t / s
1	8,5
2	6,5
3	7,5
4	9,5
5	7,0
6	9,0
7	8,0

$$\bar{t} = 8,0 \text{ s}$$

$$\sigma(\bar{t}) = \pm 0,4 \text{ s}$$

Tabelle 2

i	d / μm
1	28
2	29
3	33
4	31
5	32
6	33
7	35

$$\bar{d} = 31,57 \mu\text{m}$$

$$\sigma(\bar{d}) = \pm 0,92 \mu\text{m}$$

Tabelle 3

i	x / m
1	1,73
2	1,70
3	1,86
4	1,78
5	1,75
6	1,74
7	1,71

$$\bar{x} = 1,75 \text{ m}$$

$$\sigma(\bar{x}) = \pm 0,02 \text{ m}$$

Tabelle 4

i	D / mGy
1	14
2	16
3	13
4	15
5	13
6	14
7	20

$$\bar{D} = 15,0 \text{ mGy}$$

$$\sigma(\bar{D}) = \pm 0,9 \text{ mGy}$$

Tabelle 5

i	H / μSv
1	140
2	130
3	130
4	200
5	160
6	150
7	140

$$\bar{H} = 150 \mu\text{Sv}$$

$$\sigma(\bar{H}) = \pm 9 \mu\text{Sv}$$

Tabelle 6

i	t / a
1	59
2	59
3	59
4	64
5	64
6	64
7	58

$$\bar{t} = 61 \text{ a}$$

$$\sigma(\bar{t}) = \pm 1 \text{ a}$$

Gewöhnung an die Logarithmenrechnung

Zur Erinnerung und Gewöhnung der verschiedenen Nomenklaturen eines einzigen Sachverhaltes:

$$x = 10^y \xrightarrow{\text{kann man auch schreiben}} 10 = x^{\frac{1}{y}} = \sqrt[y]{x} \xrightarrow{\text{kann man auch schreiben}} y = \lg x$$

Beispiele zur Erinnerung:

$$x = \lg 100 \xrightarrow{\text{man kann auch schreiben}} 10^x = 100 \xrightarrow{\text{das muß man beantworten mit}} 10^2 = 100$$

also $x = 2$ (merke: so viel Nullen im Numerus, so viel Zähler für den Exponenten)

$$x = \lg 0,01 \xrightarrow{\text{man kann auch schreiben}} 10^x = 0,01 \xrightarrow{\text{das muß man beantworten mit}} 10^{-2} = 0,01$$

also $x = -2$ (merke: so viel Nullen im Numerus, so viel Zähler für den Exponenten - und(!) - bei Numeri kleiner als 1 erhält man ein negatives Ergebnis für den Exponenten
ES GIBT ABER IMMER NOCH KEINEN LOGARITHMUS EINER NEGATIVEN ZAHL!)

Übungen im Kopf zu „rechnen“:

Übungen mit dem Taschenrechner zu „rechnen“:

$$x = \lg 100 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 10 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 1000 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 10.000 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 10 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 10.000 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 0,1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 0,0010 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 0,000.01 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 112 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 75 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 1450 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 14.500 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 45 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 90.000 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 0,3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 0,8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 0,0040 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 0,007 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 0,000.02 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \lg 0,000.09 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Lösungen:

linke Spalte: 2 / 1 / 3 / 4 / 0 / 1 / 4 / -1 / -3 / -5

(für rechte Spalte gerundet nach DIN 1333)

rechte Spalte: 2,049 / 1,875 / 3,161 / 4,161 / 0,778 / 1,653 / 4,954 / -0,523 / -0,097 / -2,398 / -2,155 / -4,699 / -4,046

Was nicht geht:

$x = \lg 0$ oder $x = \lg(3-3)$, da kein reeller Exponent (hier x) die Gleichung erfüllt: $0 = 10^x$

$x = \lg(-y)$ oder $x = \lg(-12/3)$, da kein negativer Numerus erlaubt ist ($-4 = 10^x$ ist Unsinn)

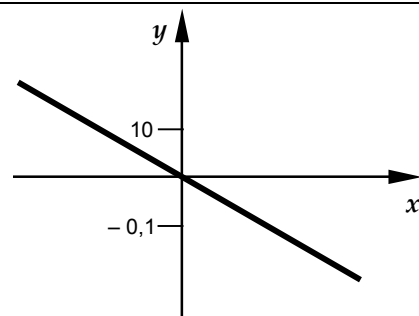
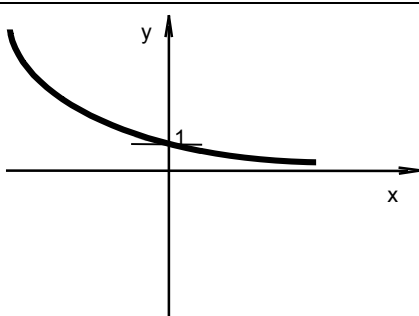
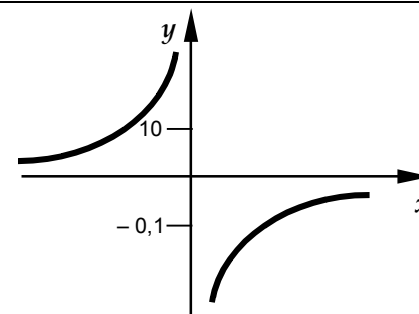
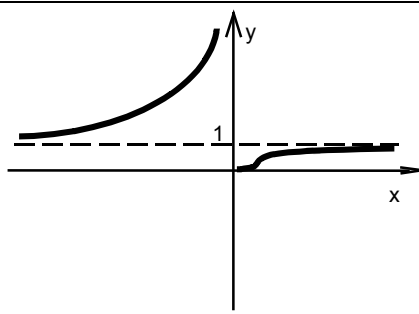
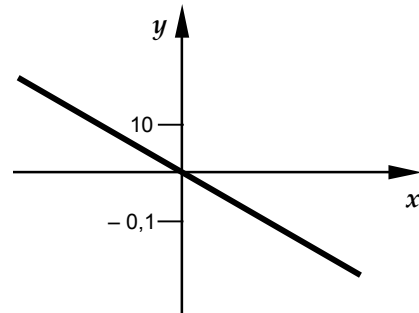
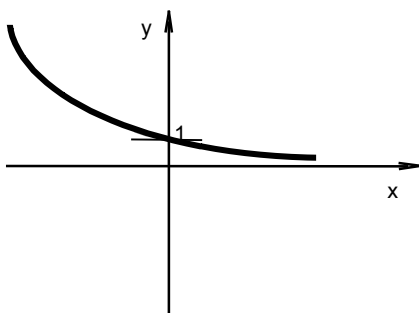
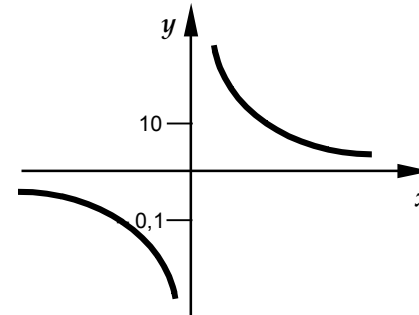
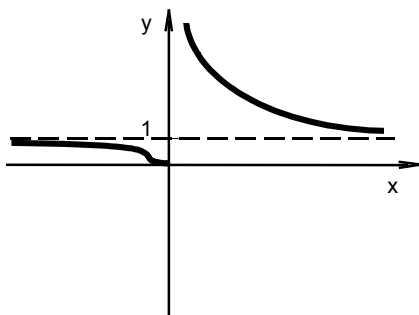
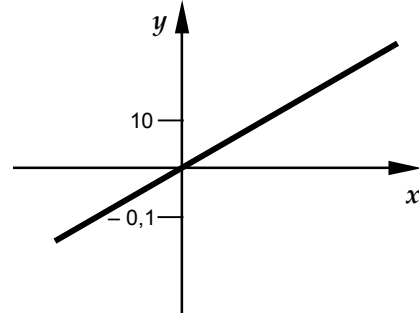
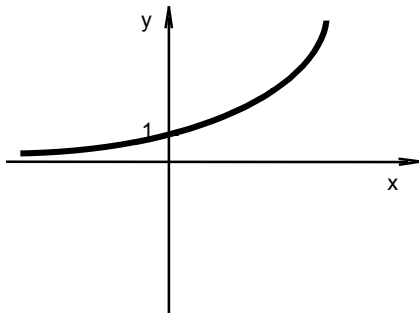
$x = \lg 5 \text{ kg}$ oder $x = \lg(3 \text{ m} / 5 \text{ s})$, da keine von Eins verschiedene Einheit erlaubt ist ($y = 10^5 \text{ kg}$ ohne physikal. Sinn)

Wer davon nicht genug hat, macht **Übungen mit Schnickschnack** (d. h. mit Vorzeichen und Einheiten)

Nur Übungen im Kopf zu rechnen:	Nur Übungen zum Hinschreiben:
$x = -\lg 100 =$	$\lg 10 =$
$x = -2 \cdot \lg 10 =$	$\lg 10^3 =$
$x = 5 - \lg 1000 =$	$\lg 1 =$
$x = -\lg \frac{1000}{10} =$	$\lg 0,1 =$
$x = -3 - \lg 10 =$	$\lg 0,01 =$
$x = \lg \frac{200 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} =$	$\lg 2 =$ *)
$x = -\lg \frac{3000 \text{ kg/m}^3}{3 \text{ kg/m}^3} =$	$\lg e = \lg 2,71828 =$ *)
$x = -2 \cdot \lg \frac{100 \text{ mol/l}}{10 \text{ mol/l}} =$	$\ln e = \ln 2,71828 =$
$x = \frac{12}{3} - \lg \frac{200 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}}{20 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}} =$	$\ln 1 =$
$x = -\frac{15}{3} - \lg \frac{1000 \text{ kmol} \cdot \text{l}^{-1}}{10 \text{ kmol} \cdot \text{l}^{-1}} =$	*) Diese Lösungen zu kennen, gehört zur erweiterten Bildung.
$x = -\frac{20}{5} + \lg \frac{1 \text{ kmol} \cdot \text{l}^{-1}}{10 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}} =$	Eigene Notizen
$x = \lg \frac{10 \text{ mol} \cdot \text{cl}^{-1}}{10 \text{ mol} \cdot \text{dl}^{-1}} =$	
$x = -\frac{45}{9} - 3 \cdot \lg \frac{1 \text{ mol} \cdot \text{cl}^{-1}}{10 \text{ mol} \cdot \text{dl}^{-1}} =$	→ Lösungen rechte Spalte: 1 / 3 / 0 / -1 / -2 / 0,301 / 0,4343 / 1 / 0
Bemerkung: Einheiten im Argument eines Logarithmus machen nur Sinn, wenn sie sich zu Eins herauskürzen.	← Lösungen linke Spalte: -2 / -2 / 2 / -2 / -4 / 2 / -3 / -2 / 3 / -7 / -2 / 1 / -5

Gewöhnung an die e -Funktionen

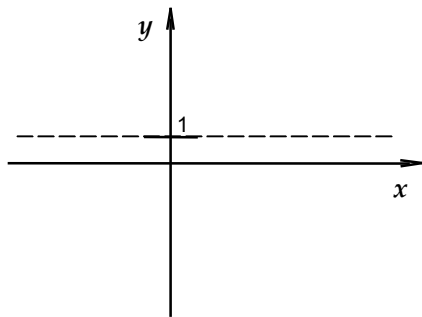
Zur Debatte stehen die Funktionen: A: $y = e^x$, B: $y = e^{-x}$, C: $y = e^{\frac{1}{x}}$, D: $y = e^{-\frac{1}{x}}$
 ↓ Lineare Teilung der Abszisse und Ordinate ↓ Halblogarithmische Teilung (Ordinate logarithmisch)



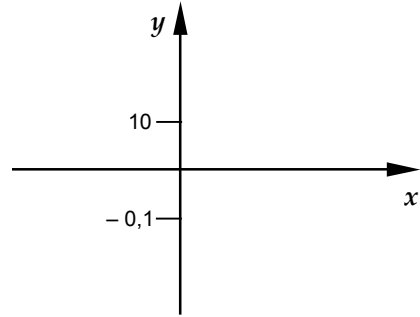
(Lösungen nächste Seite unten)

↓ Selber zeichnen in linearen Koordinaten

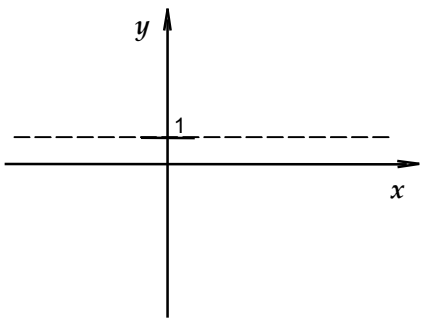
↓ Selber zeichnen in halblogarithmischen Koordinaten



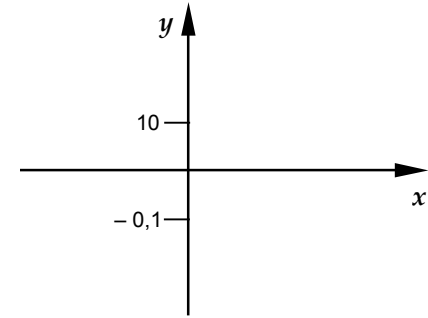
$$y = e^{-x}$$



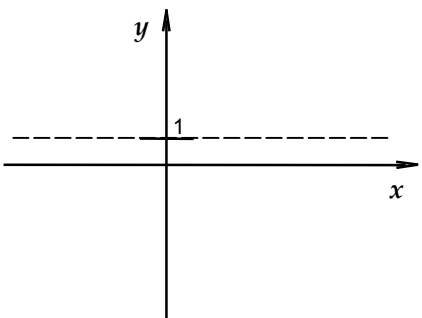
$$y = e^{-x}$$



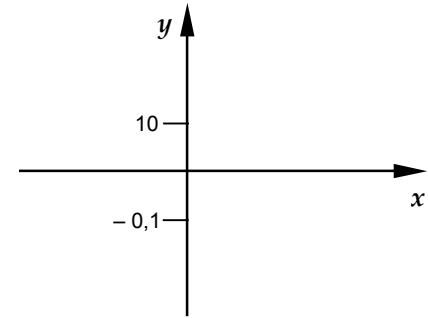
$$y = e^{\frac{1}{x}}$$



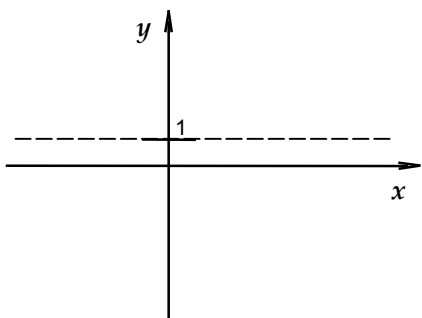
$$y = e^{\frac{1}{x}}$$



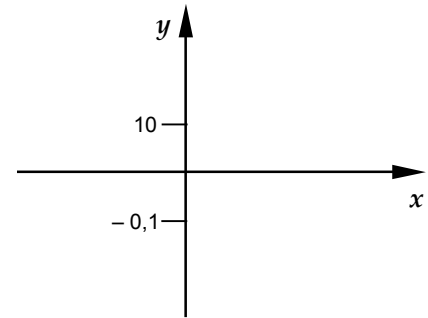
$$y = e^x$$



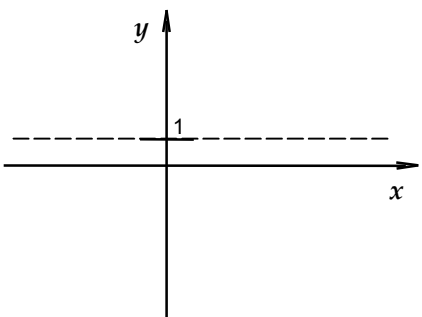
$$y = e^x$$



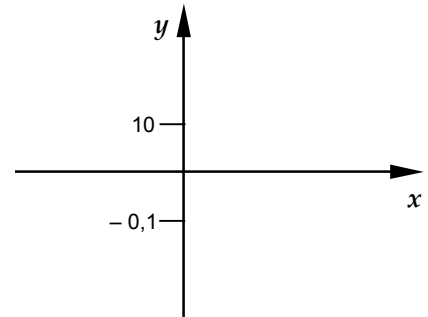
$$y = e^{-\frac{1}{x}}$$



$$y = e^{-\frac{1}{x}}$$



$$y = e^x$$



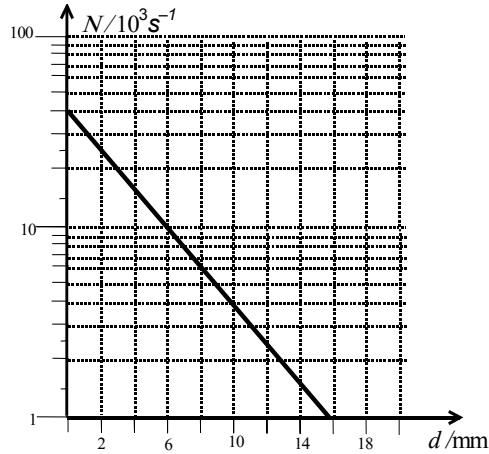
$$y = e^x$$

Lösungen der vorigen Seite: A / C / B / D / B

(Zu dieser Seite gibt es keine Lösungen)

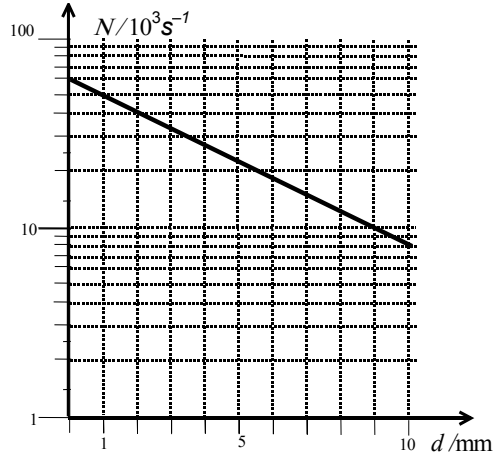
Funktionen aus dem Praktikum

1. Halbwertsdicke bestimmen



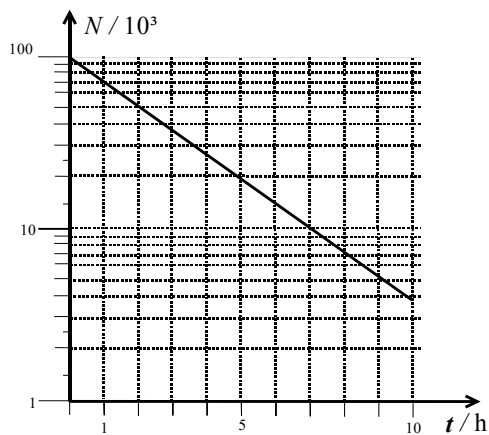
$$d_{1/2} \cong \underline{\hspace{2cm}}$$

2. Halbwertsdicke bestimmen



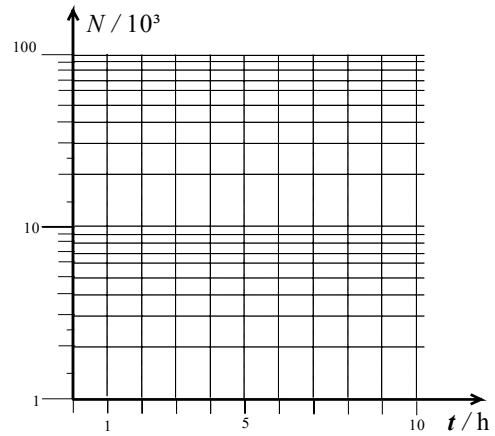
$$d_{1/2} \cong \underline{\hspace{2cm}}$$

3. Halbwertszeit bestimmen



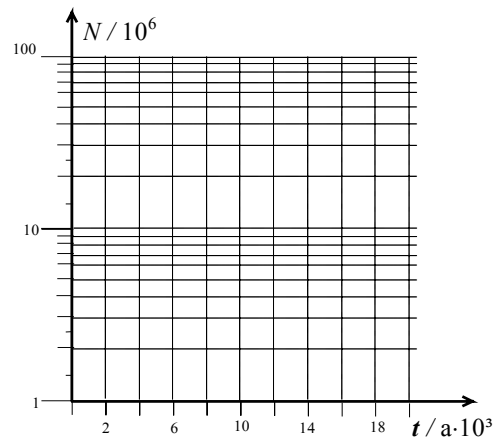
$$T_{1/2} \cong \underline{\hspace{2cm}}$$

4. Zerfallskurve einzeichnen



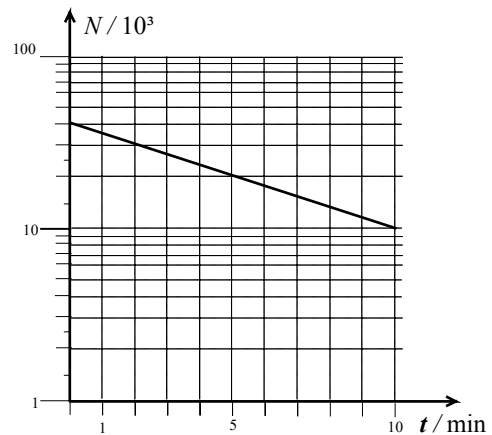
$$\text{für } T_{1/2} \cong 120 \text{ min, } N_0 = 80.000$$

5. Zerfallskurve einzeichnen



$$\text{für } T_{1/2} \cong 4000 \text{ a, } N_0 = 60 \cdot 10^6$$

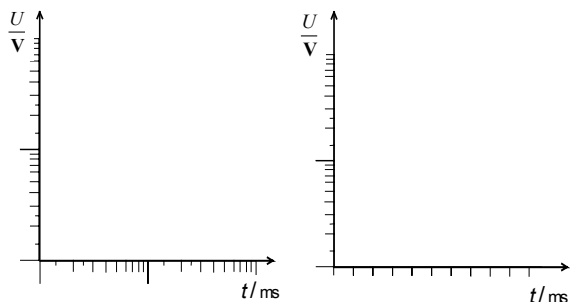
6. Halbwertszeit bestimmen



$$T_{1/2} \cong \underline{\hspace{2cm}}$$

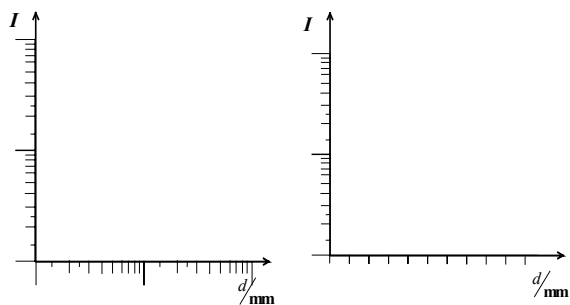
7. Prinzipiellen Kurvenverlauf einzeichnen für

$$U = U_0 \cdot e^{a \cdot t}$$



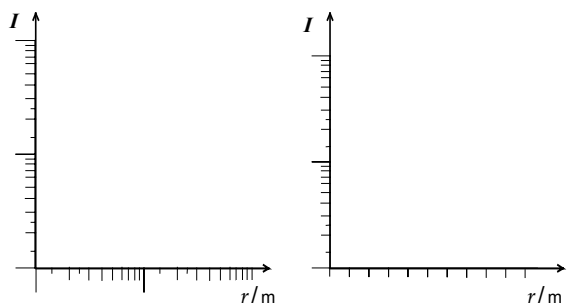
8. Prinzipiellen Kurvenverlauf einzeichnen für

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot d}$$



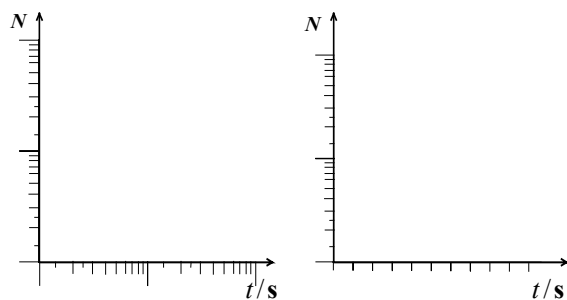
9. Prinzipiellen Kurvenverlauf einzeichnen für

$$I = I_0 \cdot \frac{1}{r^2}$$



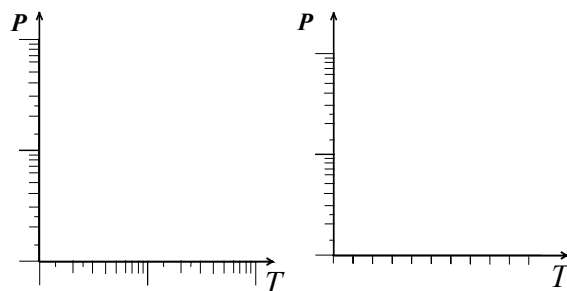
10. Prinzipiellen Kurvenverlauf einzeichnen für

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$



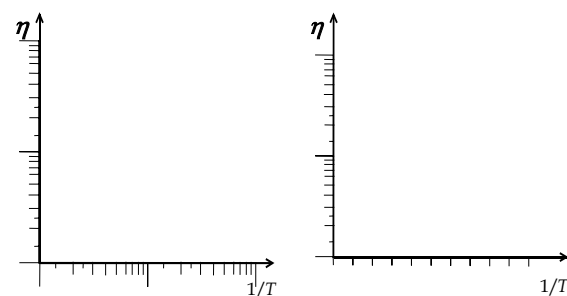
11. Prinzipiellen Kurvenverlauf einzeichnen für

$$P(T) = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4$$



12. Prinzipiellen Kurvenverlauf einzeichnen für

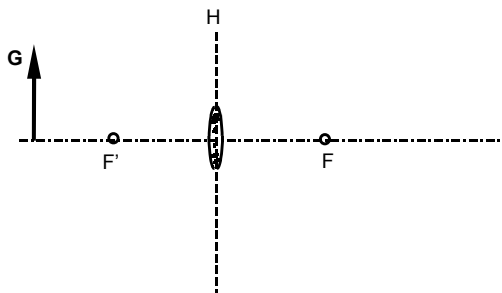
$$\eta(T) = A \cdot e^{\frac{B}{T}}$$



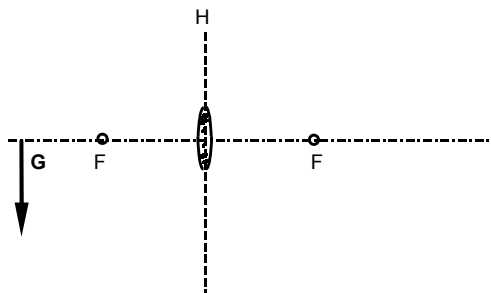
Übungen zur optischen Bildkonstruktion

Welche der möglichen drei Konstruktionsstrahlen man verwendet, ist weitgehend Geschmackssache. An den eingezeichneten Linsen ist zu erkennen, ob eine reelle oder virtuelle Konstruktion verlangt wird. Der Pfeil ist dann abgebildet, wenn Anfangs- und Endpunkt abgebildet ist. (Eine offene Pfeilspitze symbolisiert einen Pfeil der die Strahlrichtung für eine Konstruktion angibt, keinen Gegenstandspfeil.)

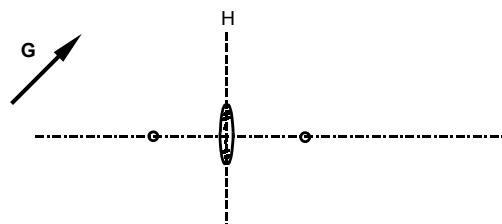
1. Bildkonstruktion



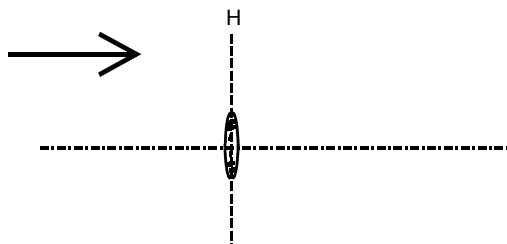
2. Bildkonstruktion



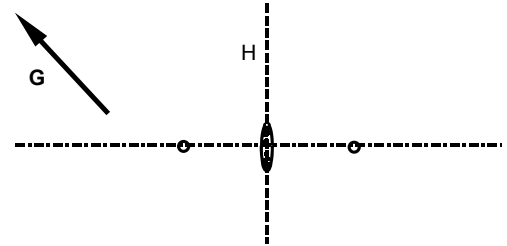
3. Bildkonstruktion



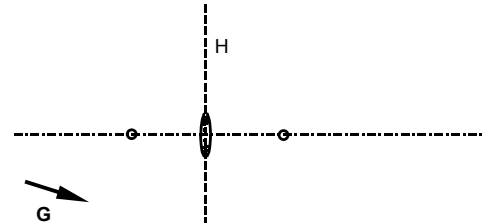
4. Brennpunkt und Brennweite wählen



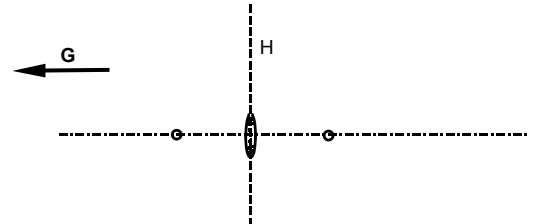
5. Bildkonstruktion



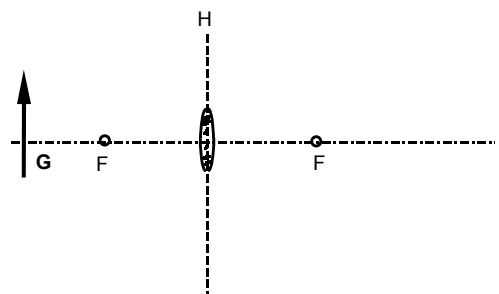
6. Bildkonstruktion



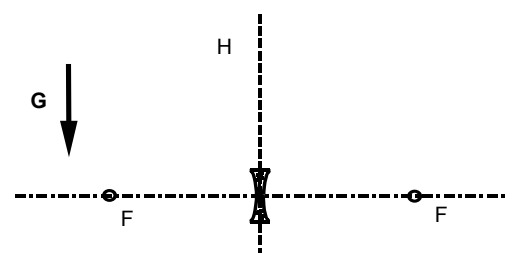
7. Bildkonstruktion



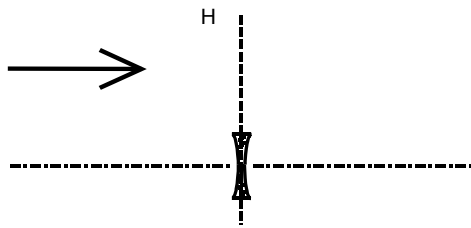
8. Bildkonstruktion



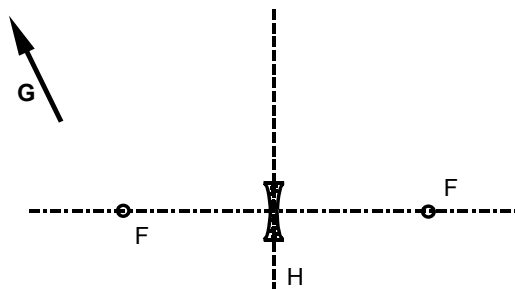
9. Bildkonstruktion



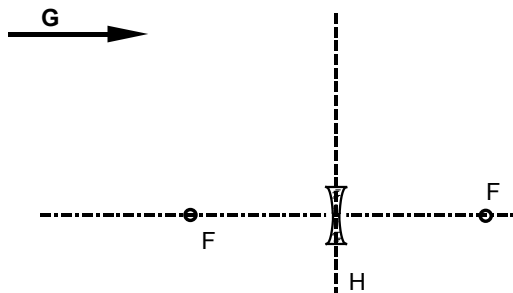
10. Brennpunkt und Brennweite wählen



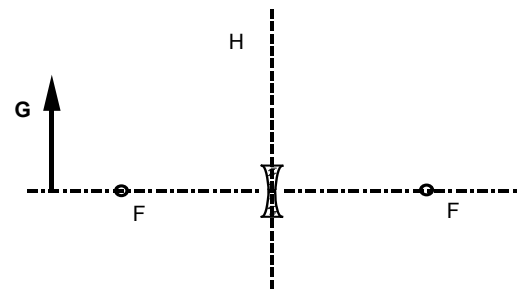
11. Bildkonstruktion



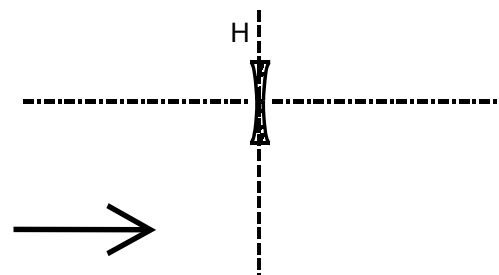
12. Bildkonstruktion



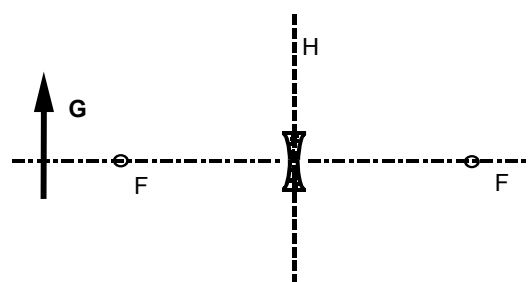
13. Bildkonstruktion



14. Brennpunkt und Brennweite wählen

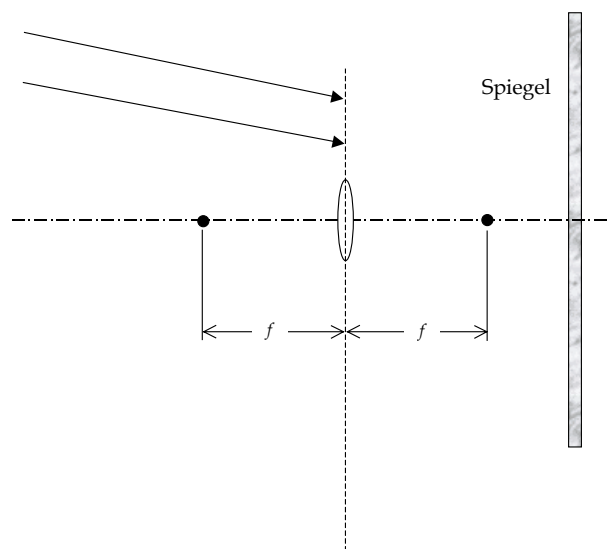


15. Bildkonstruktion



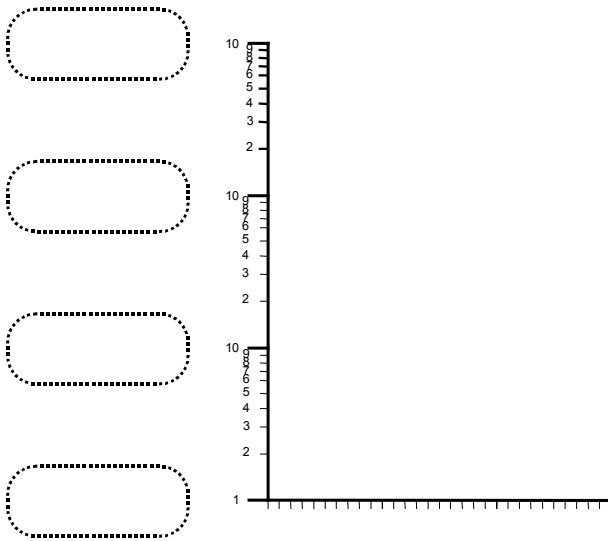
Diese Aufgabe komplettiert das Thema auf instruktive Weise und ist für Interessierte aufgeführt:

Für die gezeigten parallelen Strahlen soll nach dem Prinzip der Autokollimation der Bildpunkt gefunden werden (Brechung-Reflexion-Brechung).

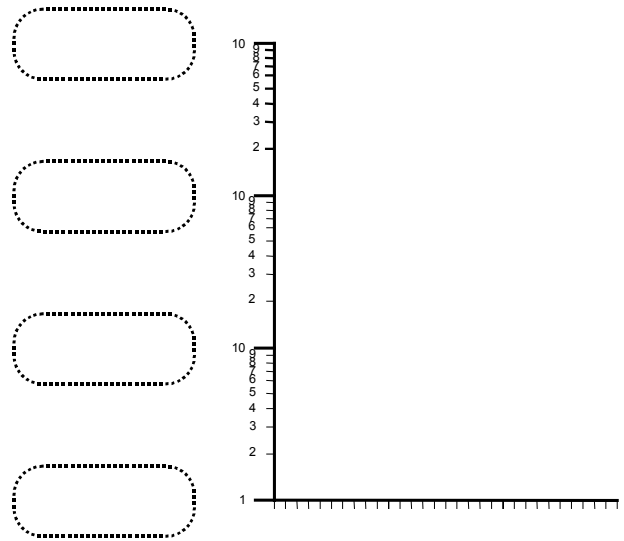


Logarithmische Ordinaten skalieren

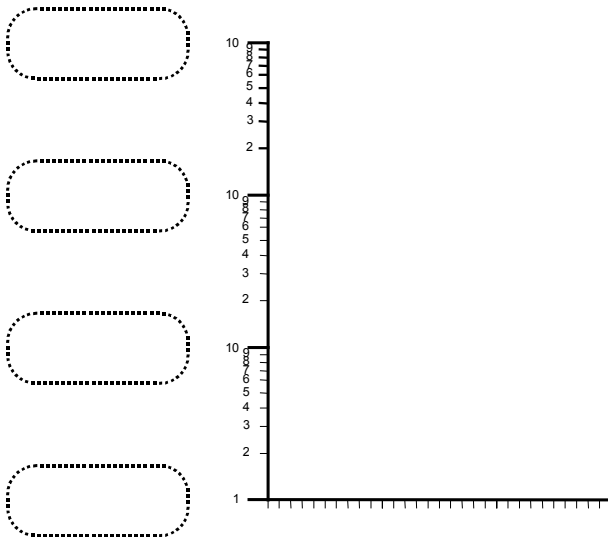
Die Ordinaten (senkrechten y-Achsen) sollen für die angegebenen Wertebereiche skaliert werden.



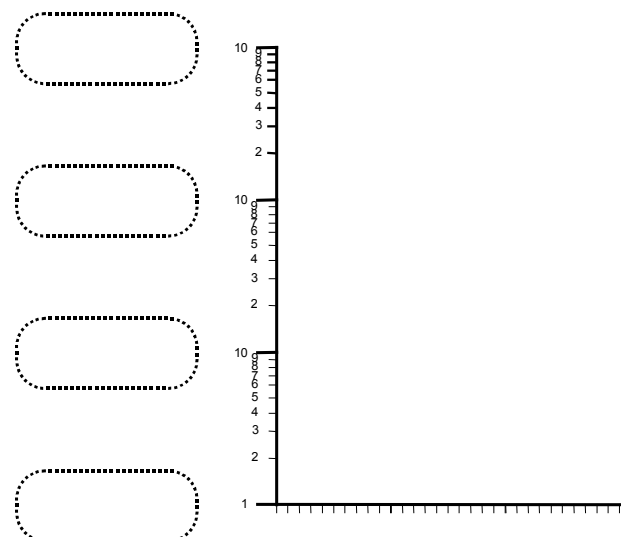
$$y = (0,01 - 10)$$



$$y = (250 - 9.800)$$

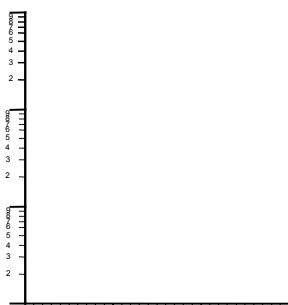


$$y = (0,003 - 1)$$

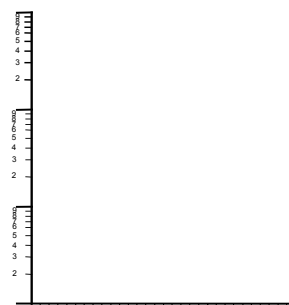


$$y = (3.800 - 112.000)$$

Zwei „Zweifelsfälle“; was ist hier falsch?



$$y = (0 - 100)$$



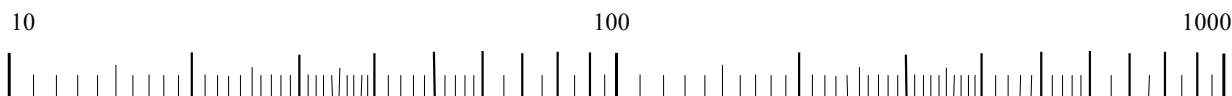
$$y = (-0,1 - 100)$$

(Lösungen nächste Seite)

Logarithmische Werte eintragen

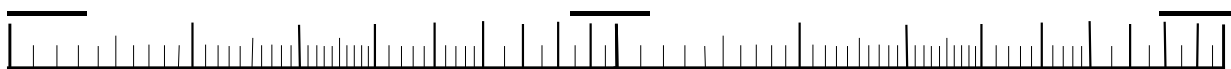
Durch Ankreuzen sollen die angegebenen Zahlenwerte eingetragen werden.

1. 10,2 / 12 / 20 / 150 / 500 / 750



... und mit Skalierung

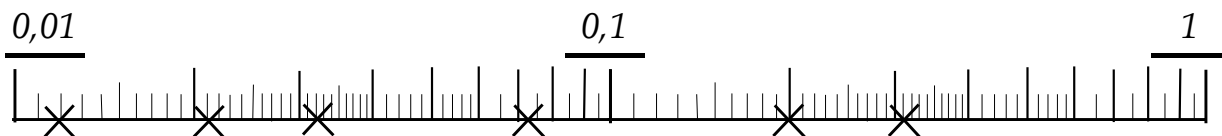
2. 0,15 / 0,4 / 1,5 / 3



3. 15 / 80 / 120 / 500 / 1000



4. Welche Zahlen lesen Sie hier ab?



5. 10 / 100 / 1000
-

Lösungen:

Vorige Seite:

10	10^5	oder	10^4
1	10^4		10^3
0,1	10^3		10^2
0,01	10^2		10
1,0	10^6		
0,1	10^5		
0,01	10^4		
0,001	10^3		

- Es ist keine Null und kein negativer Wert auf logarithmischen Achsen möglich, da der Logarithmus nur für Argumente >0 definiert ist: $\lg(-0,1) =$ unsinnig

Diese Seite:

- 1.
- 2.
- 3.
4. ungefähr: 0,012 | 0,021 | 0,032 | 0,072 | 0,2 | 0,31
5. ungefähr: 10,5 | 12 | 20 | 50 | 110 | 150 | 220 | 520

11. Einige Vorschläge zu den Klausuren

Aufräumen mit Vorurteilen:

- Die Aufgaben nicht zu Beginn durchschauen, etwa um sich die leichten Aufgaben zuerst vorzunehmen. Die verschiedenen Themengebiete in der kurzen Zeit des Durchsehens stiften nur Verwirrung. Für eine Aufgabe stehen nahezu vier Minuten zur Verfügung. Da sich stets einige Aufgaben in wenigen Sekunden lösen lassen, haben Sie auch genügend Zeit für die zwei drei ausführlicheren Rechnungen zur Verfügung.
- Eine Aufgabe ist oft auch dann leicht lösbar, wenn man ihren Lösungsweg zunächst nicht bis zum Ende durchschaut. Dazu lässt man sich von den Angaben (genannte Größen) führen und schreibt hin, was darüber bekannt ist (Formel, Gleichung). Zu den unbekannten Größen weitere Zusammenhänge mit bekannten Größen suchen und sich so durch die Aufgabe führen lassen.
- Ganz falsch ist es, mit dem Ausrechnen anzufangen, noch ehe der Lösungsweg zu einem Ende gebracht wurde; dies führt zu mangelnder Übersicht, dauert lange und bringt auch nicht mehr Punkte. Eine bewertbare Leistung liegt auch noch nicht vor, wenn lediglich Formeln hingeschrieben und Werte eingesetzt wurden. Erst wenn eine sinnvolle Manipulation von nicht trivialem Niveau erfolgt ist, kann evtl. eine Teilleistung bewertet werden. Dies ist allerdings bei MC-Aufgaben ohnehin ausgeschlossen.

Methodisches Vorgehen:

- Die Aufgaben möglichst in der gegebenen Reihenfolge angehen und nur bei begründeten Schwierigkeiten übergehen, nicht etwa aus fehlender Sympathie. Solche Probleme sind: unbekanntes **Thema**, angegebene **Größen** nicht erkennbar, ein als zu **aufwendig empfundener Rechenweg** mit vielen Zahlenschiebereien (kann z. B. bei Wärmekapazitätsberechnungen der Fall sein).
- Zu den angegebenen Sachinhalten und Größen existieren zumeist Hauptdefinitionen (Faraday, Archimedes, etc.) oder allgemeine Bedingungen, Verhältnisse von Größen, etc., die man hinschreibt und nach unbekannten Größen durchforscht (Gleichheit verschiedener Kräfte [Eiswürfel in Wasser], Relationen [Strahlungsleistung proportional der vierten Potenz der thermodynamischen Temperatur $P \propto T^4$] oder [Strömungswiderstand umgekehrt proportional der vierten Potent des Rohradius $R \propto 1/r^4$]).
- Die Formeln werden in allgemeiner Form entwickelt, möglichst bis zu der gesuchten Größe. Dabei wird noch nicht an Zahlenwerte oder Einheiten gedacht. Danach beim Einsetzen von Zahlen genügend Platz für Einheiten lassen; dabei evtl. die Vorsätze (m, μ , n, ...) sogleich in Zehnerpotenzen umwandeln (10^{-3} , 10^{-6} , 10^{-9} , ...) und sauber schreiben, da man sich sonst nicht kontrollieren kann. Die resultierende Einheit mit der geforderten oder üblichen Einheit der zu berechnenden Größe vergleichen (z. B. Wellenlängen λ des Lichtes in Nanometern angeben).
- Bei Berechnungen der Standardabweichung des Mittelwertes die tabellarische Form verwenden (Beispiel S. 15). Noch besser geht es nach etwas Übung/Gewöhnung mit dem eigenen Taschenrechner, da die Bearbeitungszeit für eine Aufgabe dann nur noch $t \leq 1\text{min}$ beträgt (Gewöhnungsaufgaben Seite 39). Zumindest in einer Klausur könnte aber der Taschenrechner nicht erlaubt sein, da auch das Überschlagen und Abschätzen von Rechnungen geübt/geprüft werden kann.
- Vor Abgabetermin der Klausur (ca. 15 min) den verbleibenden Rest von leichten Aufgaben beantworten. Letztlich darf man dann auch mal den „Mut zur Lücke“ haben.

Einige Seiten des vorliegenden Skriptes behandeln besonders klausurrelevante Themen:

Seiten	Themen
20 f. / 44 f.	Funktionsbeispiele aus dem Praktikum / Übungen
22 / 46 f.	Optische Konstruktion / Übungen
36	Vorsätze von Einheiten
39	Übungen mit dem Taschenrechner
58	Größen und Formeln

12. Lösungen

S. 27

1. Rechenstufe: $-15a - 2b$ $-a + 2(b + c)$

2. Rechenstufe:

$$\begin{array}{ll} 5x - 10y & -12ax + 12ay = 12a(y - x) \\ xy - 4y - 9x + 36 & na + 5n - 3a - 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a(x - y + z) & -11bx \\ (a - b) \cdot (x + y) & m \cdot (a + b - c + x) \\ (4n + 3m) \cdot (b + 1) & (c + 3d) \cdot (4a - 1) \end{array}$$

$$\frac{1}{5a} \qquad 3a + n$$

$$\begin{array}{ll} \frac{(3 \cdot 13n + 2 \cdot 13x - 7 \cdot 13z)}{(3n + 2x - 7z)} = \frac{13 \cdot (3n + 2x - 7z)}{3n + 2x - 7z} = 13 & \\ \frac{5 \cdot 14ac - 5 \cdot 18bc}{14a - 18b} = 5c & \frac{(c + d) \cdot (x + y)}{x + y} = c + d \end{array}$$

S. 28

Auflösen von Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} x = 7 & x = 5 \\ x = 4 & x = 6 \\ x = 5 & x = 24 \\ x = 35 & x = -2 \\ x = \frac{1}{6} & x = \frac{b}{2}(c - 1) \\ x = 1 & x = 1 \quad \text{mit } (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \\ x = 0 & x = \frac{df + da}{f} \end{array}$$

Nach Größen auflösen:

$$\begin{array}{ll} d = \frac{U}{\pi} & a = \frac{F}{m} \\ d = \frac{2M}{\pi s}; s = \frac{2M}{\pi d} & D = \frac{2M}{\pi s} - d; d = \frac{2M}{\pi s} - D; s = \frac{2M}{\pi(D + d)} \end{array}$$

Noch S. 28, Nach Größen auflösen

$$A = \frac{T}{x} \left(N - \frac{P \cdot r \cdot b}{k \cdot l} \right); T = \frac{A \cdot x}{n - \frac{P \cdot r \cdot b}{k \cdot l}}; \quad G = \frac{2V}{h} - F; h = \frac{2V}{F + G}$$

$$P = \frac{k \cdot l}{r \cdot b} \left(\frac{Ax}{T} - N \right); k = \frac{P \cdot r \cdot b}{\frac{A \cdot x \cdot l}{T} - N \cdot l}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta l} = \frac{8 \cdot \eta \cdot L}{\pi \cdot r^4}; L = \frac{\Delta p}{\Delta l} \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta}$$

$$r = \frac{F - \rho \cdot g \cdot V}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot v}; V = \frac{F - 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta \cdot v}{\rho \cdot g}$$

$$n_D = \frac{n_F - n_C}{D} + 1; n_C = n_F - D(n_D - 1) \quad \lambda = \frac{c}{v}$$

S. 29

$$\frac{2ad}{bc} \quad \frac{3a}{bc} \quad \frac{y}{a} \quad \frac{A \cdot x \cdot C}{B} \quad \frac{A \cdot x \cdot C}{B} \quad (\text{natürlich dasselbe})$$

S. 30

$$5b^5 \quad 7a^4 + 12a^{\frac{1}{2}} \quad 15ax^2 + 5a^2x + ax \quad 6\frac{a^2}{b} + 4\frac{a^2}{b^2}$$

S. 31

$$\begin{array}{lll} 3a^3 & n^{11} & 30a^5n^8 \\ 2x^3y^5 & \frac{3a}{2b} & x^{3a+1} \\ a^4b^2 & \frac{27x^9}{y^3} & \frac{x^6}{y^3} \\ \frac{16x^2}{25y^2} & \frac{n^c x^c}{a^c b^c} & e^{\frac{2}{3}} E^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2 E^2} \\ x = \pm \sqrt{y} & x = \sqrt[4]{y} & x = y^2 \\ x = y^2 & x = y^3 & x = y^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{y} \\ x = \sqrt[4]{y} & x = y^{-\frac{1}{n \cdot m}} & z.B. x = c \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{P^3}{8} & x = y & x = y^{\frac{2}{m \cdot (3m-n)}} \end{array}$$

S. 32

$$\lg \eta = \lg(\varepsilon \cdot \lambda + \vartheta)$$

$$\lg y = \lg y_0 + x \lg e$$

$$\lg P = \lg \varepsilon + \lg \sigma + \lg A + 4 \lg T$$

$$\lg I = \lg I_0 + \mu \cdot t \cdot \lg e$$

$$\lg V = \lg a + 2 \lg b - 4 \lg r - \lg \eta$$

$$\lg c = \lg a + \lg f - \lg g$$

$$\lg y = \lg y_0 + x \quad (\text{wegen } \lg 10 = 1)$$

$$\lg \eta = \lg A + \frac{B}{\eta} \lg e \quad (\text{übrigens ist } \lg e \approx 0,4343)$$

$$\lg I = \lg I_0 + \mu \cdot t$$

$$\lg N = \lg N_0 - \lambda \cdot t \cdot \lg e$$

S. 33

$$\ln y = \ln y_0 + x \quad (\ln e = 1); \quad \ln y = \ln y_0 + x \ln 10; \quad \ln P = \ln \varepsilon + \ln \sigma + \ln A + 4 \ln T; \quad \ln \eta = \ln A + \frac{B}{\eta}$$

$$\ln I = \ln I_0 + \mu \cdot t; \quad \ln I = \ln I_0 + \mu \cdot t \cdot \ln 10; \quad \ln V = \ln a + 2 \ln b - 4 \ln r - \ln \eta; \quad \ln N = \ln N_0 - \lambda t$$

Nach x auflösen:

$$x = \frac{\lg A}{\lg B}$$

$$x = \frac{\lg R}{\lg T}$$

$$x = \frac{\lg y}{\lg A + \lg B}$$

$$x = \frac{\lg A - \lg y}{\lg B}$$

$$x = \frac{\lg V + \lg B}{\lg A}$$

$$x = \frac{\lg(A - B)}{\lg C}$$

$$x = \frac{\lg y}{\lg e} = \ln y$$

$$x = \frac{\lg y - \lg A}{\lg e} = \ln y - \ln A$$

$$x = \frac{1}{a} \frac{\lg A}{\lg B}$$

$$x = -\frac{\lg \eta}{\lg e} = -\ln e$$

$$x = \frac{A \lg e}{\lg \eta} = \frac{A}{\ln \eta}$$

$$x = -\frac{1}{r} \frac{\lg U_1 - \lg U_2}{\lg e} = \frac{1}{r} (\ln U_1 - \ln U_2)$$

Auslogarithmieren:

$$\lg A + \lg B$$

$$\lg a + \lg b + \lg c$$

$$\lg a + \lg b + \lg c + \lg d$$

$$\lg a - \lg b$$

$$\lg 1 - \lg a = 0 - \lg a = -\lg a$$

$$\lg a - \lg 1 = \lg a \quad (\text{da } \lg 1 = 0)$$

$$\lg a + \lg b - \lg c$$

$$\lg a - \lg b - \lg c$$

$$\lg a + \lg b - \lg c - \lg d$$

$$b \lg a$$

$$c \lg b$$

$$\lg a + c \lg b$$

$$b \lg a - \lg c$$

$$\lg a - c \lg b$$

$$c \lg a - c \lg b$$

$$\lg x + \lg y + \lg z - \lg \eta - 4 \lg T$$

$$\lg p + \lg \pi + 2 \lg r - \lg \eta - 4 \lg T$$

S. 34

Entlogarithmieren:

$$I = A^x$$

$$I = A^x$$

$$P = E \cdot 10^2$$

$$I = I_0 \cdot e$$

$$I = I_0 \cdot e^x$$

$$A = \frac{B \cdot C}{D}$$

$$E = A \cdot 10^B$$

$$E = A \cdot e^C$$

$$W = U \cdot I$$

$$P = 10^3 \cdot A \cdot T^4$$

$$\text{Fischers Z: } e^{2Z} = e^{\ln \frac{1+r}{1-r}} = \frac{1+r}{1-r} \Rightarrow$$

$$1+r = e^{2Z} (1-r) = e^{2Z} - r \cdot e^{2Z} \Rightarrow$$

siehe Seite 34 oben rechts ↙

$$r \cdot e^{2Z} + r = e^{2Z} - 1$$

$$r(e^{2Z} + 1) = e^{2Z} - 1 \text{ usw.}$$

S. 35+36

Dreisatz:

Vorsätze:

6,8 ℓ	0,38 m		1	10^{-6}	1
4166,6 kJ	13,86 μm		0,1	10^{-2}	10^2
20,83 c ℓ	108 kPa		10^4	0,1	10^2
2,4 DM	12,5 ℓ		10^6	1	10^{-4}
20 m	12°		10^{-2}	10^2	10^4
1,2 c ℓ	150 kV		2	2	10^{-15}
			10^6	0,1	10^3

S. 37

Physikalische Größen: Arbeit (W) und Energie (E) haben die gleiche Einheit (N·m), ebenso das Drehmoment M , das hier nicht als Alternative aufgeführt ist!

Seite 37:

v	Geschwindigkeit	p	Impuls	p	Druck
F	Kraft	W	Arbeit/Energie	W	Arbeit/Energie
p	Druck	P	Leistung	I	Intensität
P	Leistung	F	Kraft	a	Beschleunigung
W	Arbeit (bzw. E Energie)	W	Arbeit/Energie	D	Energiedosis
H	Äquivalentdosis	W	Arbeit/Energie	P	Leistung
U	Spannung	Q	Ladung	F	Kraft
C	Kapazität	P	Leistung	P	Leistung (el.)
p	Druck	W	Arbeit/Energie	v	Geschwindigkeit
W	Arbeit/Energie	I	Intensität	H	Äquivalentdosis
C	Kapazität	P	Leistung (elektrische)	Q	Ladung
a	Beschleunigung	W	Arbeit/Energie	I	Ionendosis

S. 38

Einheiten analysieren und umrechnen:

linke Spalte:	rechte Spalte:
---------------	----------------

s^{-1}	$1/3,6=0,278$
----------	---------------

$Nm\ s^{-1}$	$8,76 \cdot 10^{-3}$
--------------	----------------------

J/kg	86400
--------	-------

1	16,67
---	-------

10^{-3}	$1:60 = 0,0167$
-----------	-----------------

10^{-3}	$3,6 \cdot 10^6$
-----------	------------------

s^{-1}	3,6
----------	-----

10^{-2}	10^7
-----------	--------

10^4	
--------	--

10^4	
--------	--

As	
----	--

As/V	
------	--

10	
----	--

750	
-----	--

$10 \cdot J$	
--------------	--

$10 \cdot Pa$	
---------------	--

1	
---	--

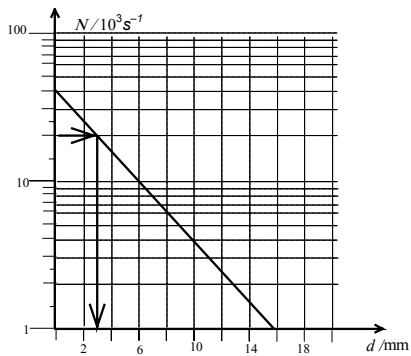
10	
----	--

10^3	
--------	--

10^{-4}	
-----------	--

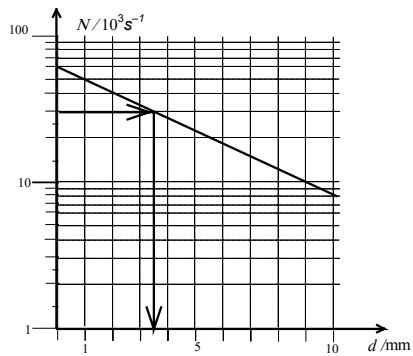
S. 44+45

Zu 1.



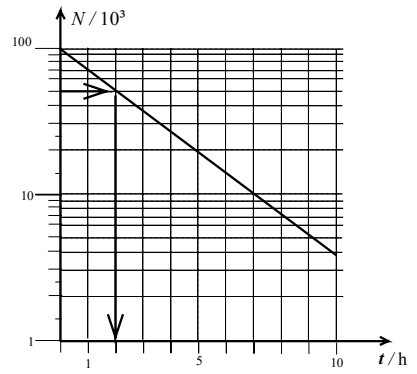
$$d_{1/2} \cong 3 \text{ mm}$$

Zu 2



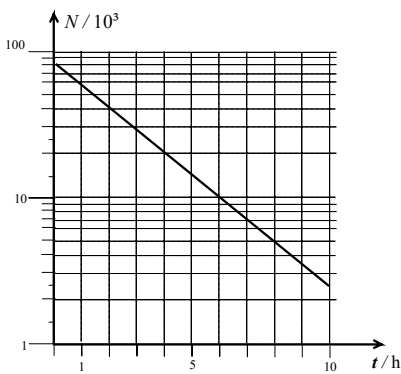
$$d_{1/2} \cong 3,5 \text{ mm}$$

Zu 3

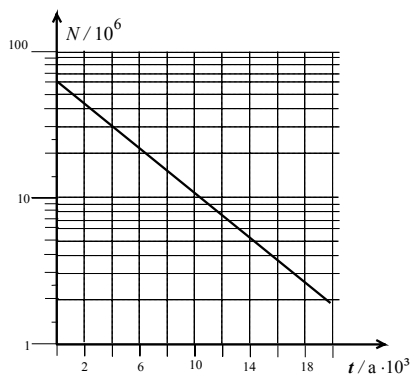


$$T_{1/2} \cong 2 \text{ h}$$

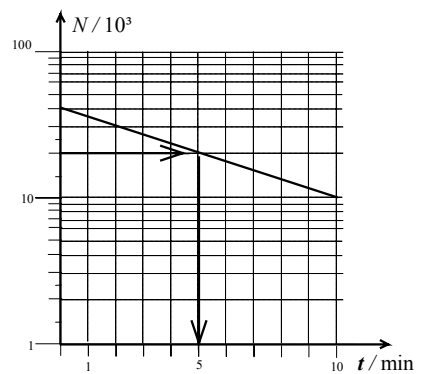
Zu 4



Zu 5

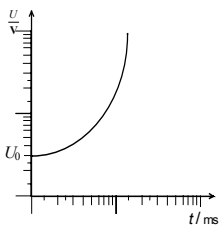


Zu 6

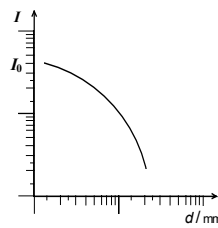


$$T_{1/2} \cong 5 \text{ min}$$

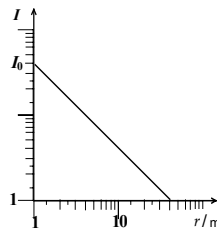
↓ Zu 7



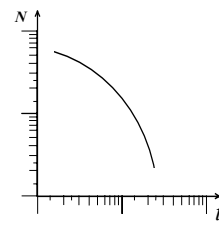
↓ Zu 8



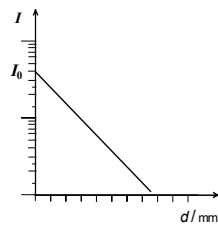
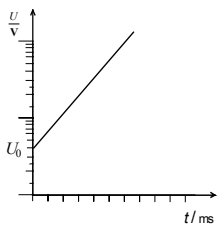
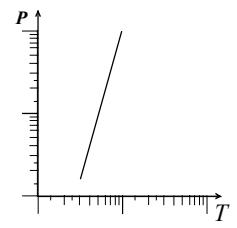
↓ Zu 9



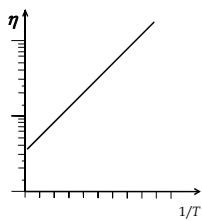
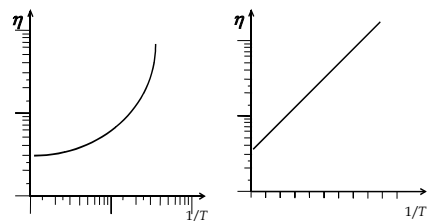
↓ Zu 10



↓ Zu 11

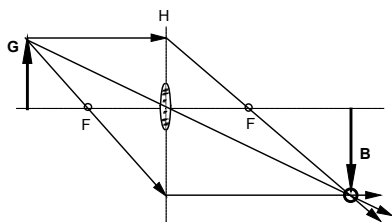


Zu 12→

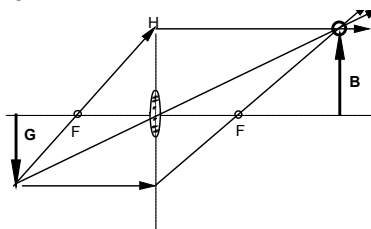


S. 46+47

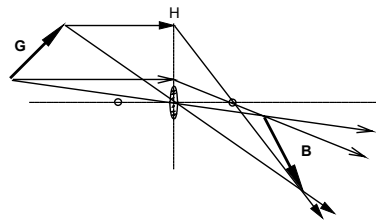
Zu 1



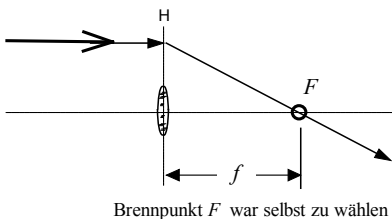
Zu 2



Zu 3

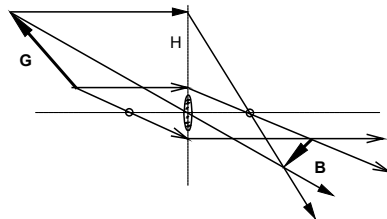


Zu 4

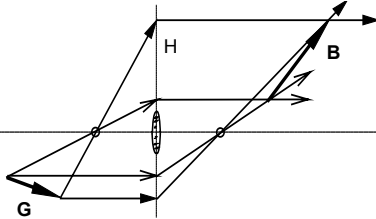


Brennpunkt F war selbst zu wählen

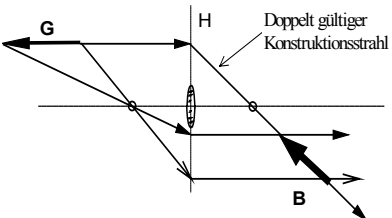
Zu 5



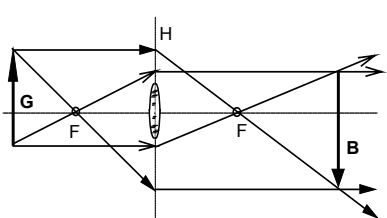
Zu 6



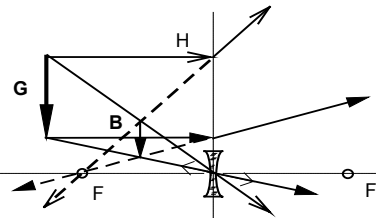
Zu 7



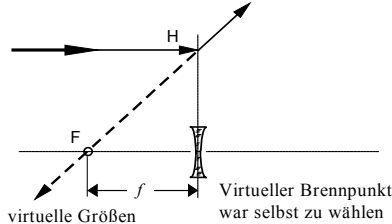
Zu 8



Zu 9

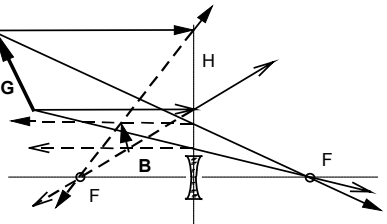


Zu 10

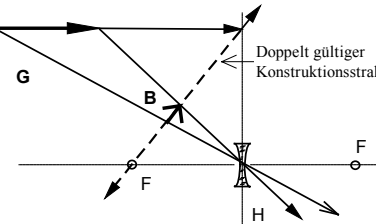


Virtueller Brennpunkt war selbst zu wählen

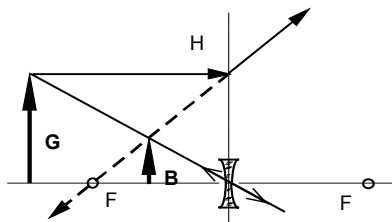
Zu 11



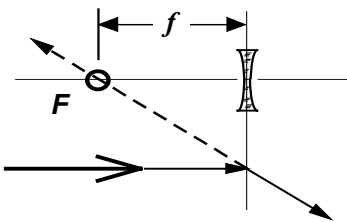
Zu 12



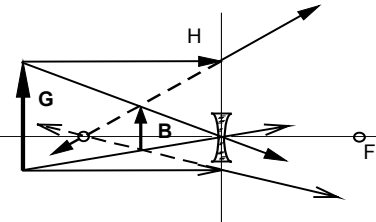
Zu 13



Zu 14



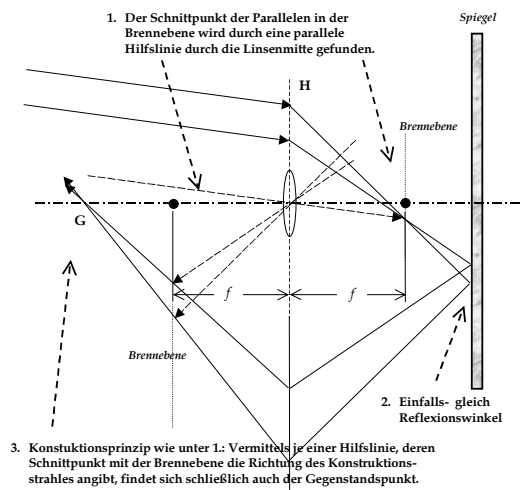
Zu 15



Lösung zur Zusatzaufgabe:

Die Hilfslinien sind gestrichelt gezeichnet; sie sind die durch den Linsenmittelpunkt verlaufenden Parallelen zu den Strahlen, zu denen man die Richtung der Brechung an der Hauptebene sucht. Das Konstruktionsprinzip beruht darauf, dass durch den Mittelpunkt (Schnittpunkt der Hauptebene mit der optischen Achse) verlaufende Strahlen ihre Richtung beibehalten und mit ihnen parallele Strahlen einen Schnittpunkt auf der Brennebene bilden, den Bildpunkt eines ∞ entfernten Gegenstandspunktes. Der Schnittpunkt einer parallelen Hilfslinie mit der Brennebene gibt also die gesuchte Richtung des Konstruktionsstrahles.

Für zur optischen Achse parallele Strahlen ist dieses Prinzip geläufiger, da dann der Schnittpunkt mit der Brennebene zugleich den bekannten Brennpunkt markiert; der Mittelpunktstrahl ist ja dann die optische Achse selber.



Größen und Formeln aus den Versuchen

Spezifische Wärmekapazität von Wasser bei ($t = 20^\circ\text{C}$):	$c_{\text{Wasser}} = 4,182 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$	*)
Spezifische Wärmekapazität von Kupfer bei ($t = 30^\circ\text{C}$):	$c_{\text{Kupfer}} = 0,383 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$	
Arbeitswert der Dichte von Wasser:	$\rho_{\text{Wasser}} = 1 \text{ kg/dm}^3 = 1 \text{ g/cm}^3$	*)
Arbeitswert der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:	$c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	*)
Hintere Brennweite im Auge:	$f_{\text{Auge}} \cong 23 \text{ mm}$	
Wellenlängenbereich von Licht (stark gerundet):	$\Delta\lambda \cong (400 - 800) \text{ nm}$	*)
Schallgeschwindigkeit in Luft bei $t = 20^\circ\text{C}$:	$c_{\text{Schall}} = 344 \text{ m/s}$	*)

<u>2. Newtonsches Axiom / Druck</u> $F = m \cdot a, \quad p = \frac{F}{A}$ <u>Archimedisches Prinzip</u> $F_A = \rho \cdot g \cdot V$ <u>Kinetische/potentielle Energie</u> $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2, \quad E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$ <u>Arbeit / Leistung</u> $W = F \cdot s, \quad P = \frac{W}{t}$ <u>Wärmeenergie</u> $\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$ <u>Grundgleichung E-Technik</u> $U = R \cdot I$	<u>Energie</u> <u>Leistung</u> $E = U \cdot I \cdot t, \quad P = U \cdot I$ <u>Abbildungsgleichung</u> $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$ <u>Brechwert</u> $D = \frac{1}{f}$ <u>Brechzahl</u> $n = \frac{c_0}{c_{\text{Medium}}}$ <u>Strahlungsenergie</u> $E = h \cdot \nu$	<u>Schwächungsgesetz</u> $I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot d}$ <u>Zerfallsgesetz</u> $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ <u>Frequenz/Periode</u> $\nu = \frac{1}{T}$ <u>Allg. Beziehung für Wellen</u> $c = \lambda \cdot \nu$ <u>Fehler des Mittelwertes</u> $\Delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}$
---	--	--

*) Die markierten Größen und hier aufgeführten Formeln werden in den Klausuren nicht den Aufgaben beigegeben. Es lohnt sich also, genau diese Größen und Formeln zu erlernen.

