http://wwwiexp.desy.de/users/uwe.holm

Propädeutikum zum Physikalischen Praktikum für Studierende der Biologie und Zahnmedizin (Teil 2)

Uwe Holm

Physikalische Größen

Fehlerrechnung

Vektorrechnung

Differentialrechnung

Physik-Propädeutikum

Das Propädeutikum ist Teil des Physik-Praktikums. Es soll auf das Praktikum vorbereiten.
Es findet statt während der ersten Vorlesungstermine der Experimentalphysik-Vorlesung.

Abschluss ist eine **Klausur**!

Die Klausur ist eine von zwei Klausuren zum Praktikum. Zum Erwerb des Physik-Scheins müssen jeweils mindestens 50% der Aufgaben richtig gelöst werden.

Lehrziele des Physik-Propädeutikums (und damit der Stoff, der in der ersten Klausur vorkommen kann):

- A. Mathematische Hilfsmittel der Physik

1. Funktionsbegriff
2. Proportionalität und linearer Zusammenhang
3. Funktionsgleichung einer Geraden, Graph
4. Parabel
5. Winkelfunktionen (Gradmaß, Bogenmaß, Sinusfunktion)
6. Exponentialfunktionen (auch Rechenregeln für Potenzen)
7. Logarithmusfunktion (Rechenregeln, log. Darstellungen)

- B. Physikalische Grundlagen
  1. Physikalische Begriffe, Größen
  2. Basisgrößen, Basiseinheiten, SI-System
  3. Abgeleitete Größen und Einheiten
  4. Vorsilben
  5. Messungen, Darstellung der Messergebnisse
  6. Messfehler (systematische, zufällige)
  7. Fehlerrechnung (Standardabweichung des Mittelwerts, Fehlerfortpflanzung)
  8. Vektoren
  9. Differentialquotient
- C. Physik
  1. Einführung in das Praktikum

Bücher

Stand: August 2005

Fercher●: 'Medizinische Physik, Physik für Mediziner, Pharmazeuten, Biologen'; Springer-V., 2. Auflage(1999), 53,90 Euro

Haas●: 'Physik für Pharmazeuten und Mediziner'; Wiss. Verlagsges., 6. Auflage (2002), 54,00 Euro

Harms: 'Physik für Mediziner und Pharmazeuten'; V. Harms, 16. Auflage (2004), 14,73 Euro.

Harten●: 'Physik für Mediziner'; Springer-Lehrbuch, 11. Auflage (2005), 29,95 Euro

Hellenthal●: 'Physik für Mediziner und Biologen'; Wiss. Verlagsges., 7. Auflage (2002), 23,50 Euro

Trautwein, Kreibig, Oberhausen●: 'Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten'; de Gruyter-V., 6. Auflage (2004), 29,95 Euro

Tritthart: 'Medizinische Physik und Biophysik'; Schattauer-V., 1. Auflage (2001), 34,95 Euro

und andere

Diese Transparente sowie Vorlesungsskript und Praktikumsunterlagen im www:

http://wwwiexp.desy.de/users/uwe.holm

PHYSIK

Mit der **Physik** beschreibt man die allgemeinen Eigenschaften der Materie und die gegenseitigen Wechselwirkungen ihrer Bestandteile.

Dabei ist man der **Überzeugung**, daß das Geschehen und die zeitlichen Abläufe nicht zufällig sind, sondern allgemeinen Gesetzmäßigkeiten gehorchen.

Die Physik ist eine **Erfahrungswissenschaft**, ihre Erkenntnisse beruhen auf Erfahrungen (zufällige oder Experimente).

Die Beschreibung des physikalischen Geschehens erfolgt mit **physikalischen Begriffen**, die möglichst geeignet definiert werden sollten (z.B. “Länge”).

Physik ist eine **exakte Naturwissenschaft**, d.h. die Beobachtungen werden quantitativ erfaßt (Messung): Man bestimmt **physikalische Größen**, die gegeben sind als Produkt von Maßzahl und Einheit (z.B. “$3 \cdot m$”).

Das Ziel eines Experiments ist es, einen funktionellen Zusammenhang zwischen den beteiligten Größen zu finden. Beim “freien Fall” z.B. erhält man die Abhängigkeit der Falldauer von der Fallhöhe durch folgende empirische Formel (**physikalisches Gesetz**):

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{oder} \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Das Ziel der Physik ist das Auffinden von **unbeschränkt gültigen Naturgesetzen**, durch die nicht nur Beobachtungen zusammengefaßt werden, sondern auch das physikalische Geschehen **quantitiativ vorhergesagt** werden kann (z.B. Gravitationsgesetz).

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Grundbegriffe des Messens

Die **physikalische Größe G** ist ein quantitativ erfassbarer, d.h. messbarer Begriff. Für die Messung braucht man als Definition eine **Maßeinheit** [G] und eine **Messvorschrift**. Größe G messen bedeutet: Wie oft ist Maßeinheit [G] in G enthalten? Wird dieser Zahlenwert mit {G} bezeichnet, so gilt

$$G = \{G\} \cdot [G].$$

Wird andere Maßeinheit [G′] verwendet, so ändert sich auch Zahlenwert {G′}, nicht aber die physikalische Größe

$$G = \{G\}[G] = \{G'\}[G']$$

Beispiel:

Längenmessung eines Stabes; die Maßeinheit der Länge ist $[L] = 1\,m$.
Die Messung ergibt, dass die Maßeinheit 1 m 3,5-mal in die Stablänge “passt”, d.h. die Länge des Stabes ist dann

$$L_{stab} = \{L_{stab}\} \cdot [L]$$
$$L_{stab} = 3,5 \cdot 1\,m = 3,5\,m$$

Bei Verwendung einer anderen Einheit ändert sich auch der Zahlenfaktor, nicht aber die Größe:

$$L_{stab} = 3,5 \cdot 1\,m = 3500 \cdot 1\,mm = 3500\,mm$$

Ein **Physikalisches Gesetz** ist eine mathematische Gleichung zwischen physikalischen Größen (d.h. Maßeinheiten sind Teil der Gleichung).

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

Mit $t = 3\,s$ erhält man

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot \frac{m}{s^2} \cdot (3 \cdot s)^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot \frac{m}{s^2} \cdot 9 \cdot s^2 = 44,1\,m.$$

International hat man sich auf das **Einheitensystem SI** (Système International d'Unités) festgelegt. Es enthält sieben **Basisgrößen** (bzw. -einheiten):

Länge, Masse, Zeit, elektr. Stromstärke, thermodyn. Temperatur, Lichtstärke, Stoffmenge.

Dazu gibt es eine Vielzahl von **abgeleiteten Größen** (Produkte bzw. Quotienten von Basisgrößen), z.B.

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Länge(ndifferenz)}}{\text{Zeit(differenz)}}$$

Basisgrößen und Basiseinheiten

Forderungen an Maßeinheit: Unveränderlichkeit, Reproduzierbarkeit, Genauigkeit. Ansprüche sind im Laufe der Zeit höher geworden.

1. **LÄNGE** ℓ: Ursprüngliche Einheit das "Urmeter". Jetzt: Lichtgeschwindigkeit

   wird festgelegt auf $c = 299.792.458$ m/s.

   Mit Definition der Sekunde gilt dann:

   > "Das **Meter** ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während des Intervalls von (1/299.792.458) s durchläuft."

   Messtechnisch ist das Meter also von der Zeitmessung abhängig.

   Messvorschrift: Länge s einer Strecke ergibt sich aus Maßzahl, die angibt, wie oft Einheit der Strecke anzulegen ist, bis Gleichheit besteht, und der Einheit m.

   Messgeräte: Strichmaßstab, Schublehre, Mikrometerschraube.

SI-Einheiten

Begriff	Name der SI-Einheit (Basiseinheit bzw. abgeleitete Einheit)	Symbol, Zusammenhang mit Basiseinheiten
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunde	s
Masse	Kilogramm	kg
Fläche	Quadratmeter	m^2
Volumen	Kubikmeter	m^3
Frequenz	Hertz	$Hz = s^{-1}$
Geschwindigkeit	Meter/Sekunde	$m\ s^{-1}$
Beschleunigung	Meter/Quadratsek.	$m\ s^{-2}$
Kraft	Newton	$N = kg\ m\ s^{-2}$
Druck	Pascal	$Pa = N\ m^{-2} = kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
Arbeit,Energie, Wärmemenge	Joule	$J = Nm = kg\ m^2\ s^{-2}$
Leistung	Watt	$W = J\ s^{-1} = kg\ m^2\ s^{-3}$
Dichte	Kilogramm/Kubikm.	$kg\ m^{-3}$
Temperatur	Kelvin	K

SI-Einheiten (Fortsetzung)

Begriff	Name der SI-Einheit (Basiseinheit bzw. abgeleitete Einheit)	Symbol, Zusammenhang mit Basiseinheiten
Stromstärke	Ampere	A
Ladung	Coulomb	$\mathrm{C = A\ s}$
Stromdichte	Ampere/Quadratm.	$\mathrm{A\ m^{-2}}$
Spannung	Volt	$\mathrm{V = J\ C^{-1} = kg\ m^2 s^{-3} A^{-1}}$
Widerstand	Ohm	$\mathrm{\Omega = V\ A^{-1} = kg\ m^2 s^{-3} A^{-2}}$
Kapazität	Farad	$\mathrm{F = C\ V^{-1} = kg^{-1}\ m^{-2}\ s^4 A^2}$
elektr. Feldstärke	Volt/Meter	$\mathrm{V\ m^{-1} = kg\ ms^{-3} A{-}1}$
magnet. Feldst.	Ampere/Meter	$\mathrm{A\ m^{-1}}$
magnet. Induktion	Tesla	$\mathrm{T = V\ s\ m^{-2} = kg\ s^{-2} A^{-1}}$
Induktivität	Henry	$\mathrm{H = V\ s\ A^{-1} = kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-}}$
Lichtstärke	Candela	cd
Energiedosis	Gray	$\mathrm{Gy = J\ kg^{-1} = m^2\ s^{-2}}$
Aktivität	Becquerel	$\mathrm{Bq = s^{-1}}$
Stoffmenge	Mol	mol

2. **ZEIT** t: Der Begriff der Zeit wird über die Bewegung eines Körpers gewonnen. Zwischen zwei Beobachtungen verändere sich die Lage des Körpers. Man sagt dann, die Beobachtungen finden zu verschiedenen "Zeiten" statt. Aus dem zeitlichem Ablauf physikalischer Vorgänge, insbesondere periodischer, wird das Maß für die Zeit gewonnen.

   Gültige Definition der Sekunde (s):

   > 1 s entspricht der Zeit von 9.192.631.770 Schwingungen eines bestimmten Übergangs im ^{133}Cs- Atom ("Atomuhr").

   Die relative Ganggenauigkeit ist 10^{-11}, d.h. ca. 0,3 ms/Jahr.

   So definierte Zeitmessung ist nicht absolut. Bei Geschwindigkeit eines Körpers nahe der Lichtgeschwindigkeit "gehen die Uhren langsamer" (Zwillingsparadoxon, spezielle Relativitätstheorie).

3. **MASSE** m: Jedem Körper wird bestimmte, für ihn charakteristische Masse m zugeordnet. Sie ist Maß für seine "Trägheit". Einheit 1 kg (Kilogramm) ist definiert durch Prototypen in Paris.

Zehnerpotenz	Vorsilbe	Abkürzung
10^{18}	Exa	E
10^{15}	Peta	P
10^{12}	Tera	T
10^{9}	Giga	G
10^{6}	Mega	M
10^{3}	Kilo	k
10^{2}	Hekto	h
10^{1}	Deka	da
10^{-1}	Dezi	d
10^{-2}	Zenti	c
10^{-3}	Milli	m
10^{-6}	Mikro	μ
10^{-9}	Nano	n
10^{-12}	Piko	p
10^{-15}	Femto	f
10^{-18}	Atto	a

Winkelmessung

Ebener Winkel α = "Öffnung zweier sich schneidender Strahlen"

a) **Gradmaß**: 1 Grad (°) = 1/90 des rechten Winkels

b) **Bogenmaß**: Kreisbögen b_i um Mittelpunkt verhalten sich wie ihre Radien, d.h. Verhältnis $\frac{b_i}{r_i} = const.$ Damit Maß für Winkel:

$$\widehat{\alpha}\ (\text{Bogenmaß}) = \frac{b}{r}$$

Umrechnung ins Gradmaß:

$$\begin{aligned}
\text{"voller Winkel"} \quad \widehat{\alpha}_{360^\circ} &= \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \\
\Rightarrow \qquad \widehat{\alpha}_{1^\circ} &= \frac{2\pi}{360} \\
\text{Einheit : 1Radiant}(rad) &\mathrel{\widehat{=}} \frac{360^\circ}{2\pi} = 57{,}3^\circ \\
\text{Damit also :} \quad \widehat{\alpha}_{360^\circ} &= 2\pi\ rad
\end{aligned}$$

In der Physik wird i.A. der Winkel im Bogenmaß gemessen, das Symbol $\widehat{\ }$ für das Bogenmaß wird weggelassen:

$$\alpha = \frac{b}{r}$$

Raumwinkel Ω ist die "räumliche Öffnung", die die vom Kugelmittelpunkt ausgehenden Strahlen der Mantelfläche eines Kegels einschließen

$$\Omega = \frac{A}{r^2}, \text{ Einheit 1 Steradiant (sr)}$$

(A = Durchstoßungsfläche des Kegels durch Kugeloberfläche).

Der "volle Raumwinkel" ist dann (gesamte Kugeloberfläche durch r^2)

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2}\, sr = 4\pi\ sr$$

Messunsicherheiten und Messfehler

Messungen sind nicht völlig exakt: Messgeräte haben nur gewisse Genauigkeit, der Ablesende macht (Schätz-)Fehler. Es gibt zwei Arten von Fehlern:

Systematische Fehler: Fehlerhafter Bau von Messgeräten, falsche Eichung von Messgeräten, Änderung eines Maßstabs mit der Temperatur, ...

Zufällige Fehler: Ablesefehler, Schwankungen des "Zeigers", Spiel in Spindel der Mikrometerschraube,....

Der Einfluss der <u>zufälligen</u> Fehler wird durch häufiges Wiederholen der Messung und Mittelwertbildung kleiner.

Bei der Messung ist es wichtig, eine Abschätzung des Fehlers zu machen, mit dem der Messwert behaftet sein kann (**Fehlerrechnung**). Das Ergebnis einer Längenmessung wird dann z.B. so angegeben:

$$
\begin{aligned}
\ell &= (5,63 \pm 0,01)\, m \quad \text{oder} \\
\ell &= 5,63\, m \pm 0,2\%
\end{aligned}
$$

Dies bedeutet, dass der **wahre Wert** mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit innerhalb des angegebenen Intervalls liegt (Näheres in “Fehlerrechnung” im Propädeutikum).

Beim Messen kann der Messende auch leicht **Sinnestäuschungen** erliegen!

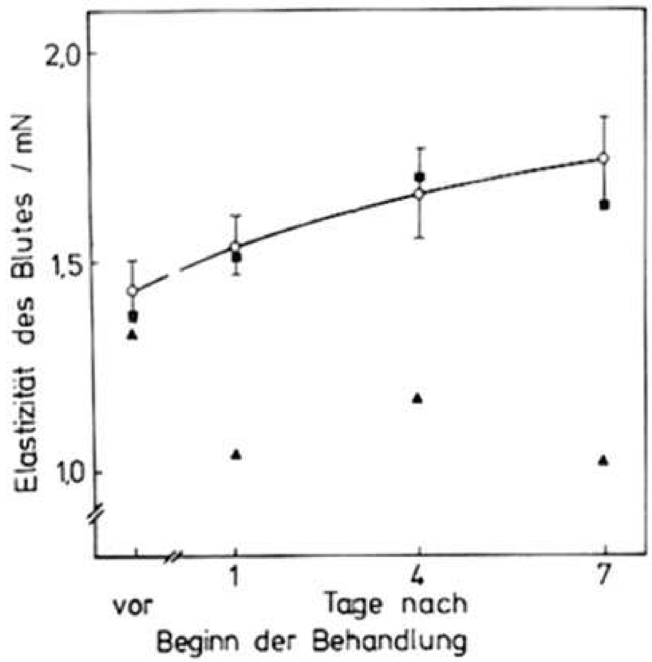


Abb. 1.12. *Trombelastogramm* während einer Behandlung mit Heparin als Beispiel für ein Diagramm mit Fehlerbalken (in diesem Zusammenhang spielen das Meßverfahren und die medizinische Bedeutung der Meßwerte keine Rolle). Kreise und Fehlerbalken: Mittelwerte aus einer Beobachtungsgruppe von 28 Patienten mit Standardfehler; die ausgefüllten Meßpunkte gehören zu zwei Mitgliedern der Beobachtungsgruppe: Einzelne Meßwerte können durchaus weit außerhalb des Standardfehlers liegen. Die Dreiecke demonstrieren ein häufiges Dilemma medizinischer Messungen: Manche Patienten halten sich nicht an die Norm

Beispiel einer Messung mit Angabe von Fehlern (Fehlerbalken)

Fehlerrechnung

Fehlerrechnung ist ein Teilbereich der mathematischen Statistik.

Fragestellung: Im Labor werden Messungen durchgeführt: Welches ist der wahre Wert?
Abschätzung über Genauigkeit der Messung nötig!

Drei Typen von Messfehlern:

1. Systematische Fehler:
   Fehler des Messinstruments, des Messverfahrens.
   Ergebnis ist in eine Richtung falsch (systematisch zu groß oder zu klein).
   Systematische Fehler können nicht mit Fehlerrechnung entdeckt werden.

2. Zufallsfehler:
   Zufallsfehler führen dazu, dass bei Wiederholungen der Messung nicht immer dieselben Werte gemessen werden.

   Man hat Streuung der Messwerte.

   Schwankungen: z.B. Grenze der Messgenauigkeit.

3. Grobe Fehler

Messergebnis:

$$\text{Messwert X} = \text{Wahrer Wert W} + \text{Fehlerkomponente F}$$

$$\text{F} = \text{Zufallsfehler F}_1 + (\text{systematischer Fehler F}_2)$$

Mittelwert:

Zur Erhöhung der Zuverlässigkeit (Verkleinerung des zufälligen Fehlers) macht man n Messungen (1 Stichprobe).
Die beste Schätzung des unbekannten wahren Werts ist dann der arithmetische Mittelwert $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

Fragestellung:

Wie gut ist das Messergebnis (der Mittelwert $\overline{x}$)?

$\Rightarrow$ **Fehlerrechnung**

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung (Standardabweichung):

$$s = +\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Fehler des Mittelwerts :

$$\Delta\overline{x} = \frac{s}{\sqrt{n}} = +\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Ergebnis der Messung:

Der wahre Wert x liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall

$$\overline{x} \pm \Delta\overline{x}$$

mit 95,5% im Intervall

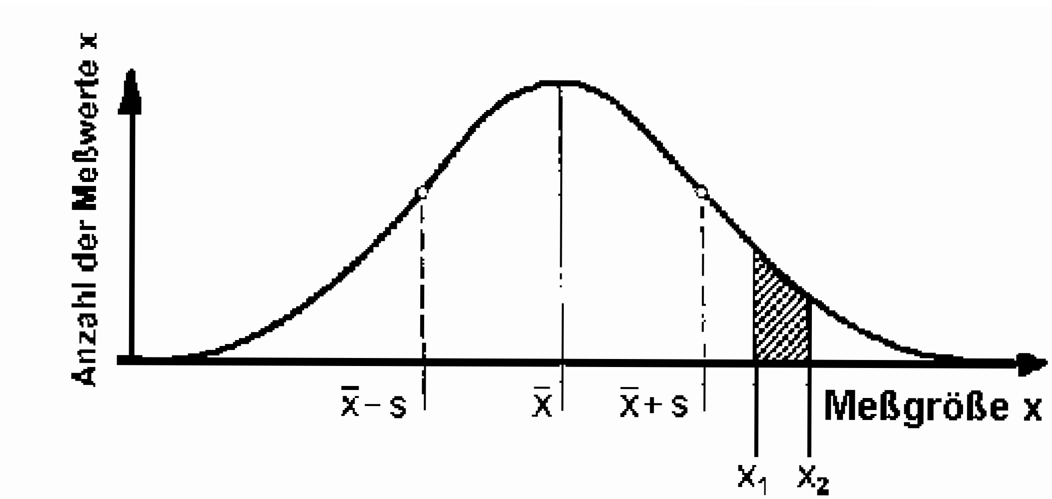
$$\overline{x} \pm 2\Delta\overline{x}$$

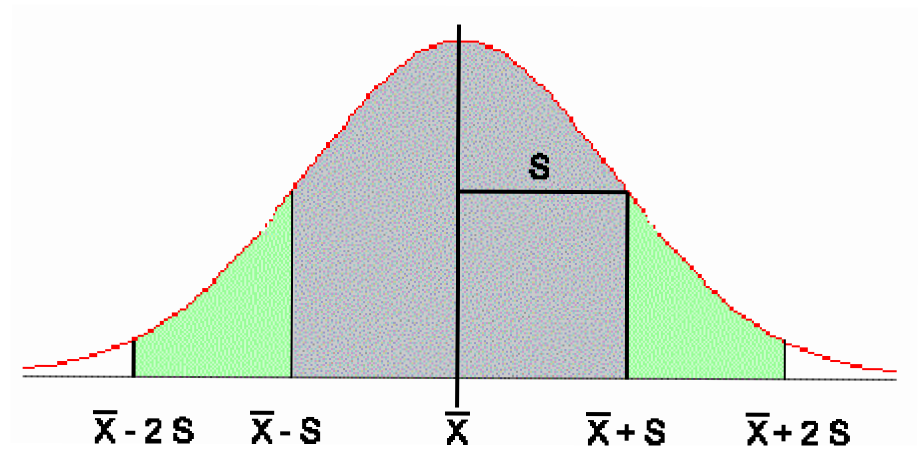
mit 99,7% im Intervall

$$\overline{x} \pm 3\Delta\overline{x}$$

Bei reinen Zufallsfehlern ist die Häufigkeitsverteilung der Messergebnisse eine (unendlich viele Messungen vorausgesetzt)

Gaußsche Fehlerkurve (Glockenkurve, Normalverteilung)





$$H(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}}$$

(s: Standardabweichung; $e = 2,718$)

Ein Messwert x_i liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall
$\bar{x}$ - s bis $\bar{x}$ + s (violette Fläche),

ebenso liegt der wahre Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $\bar{x}$ - $\Delta\bar{x}$ bis $\bar{x} + \Delta\bar{x}$ ($\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}}$).

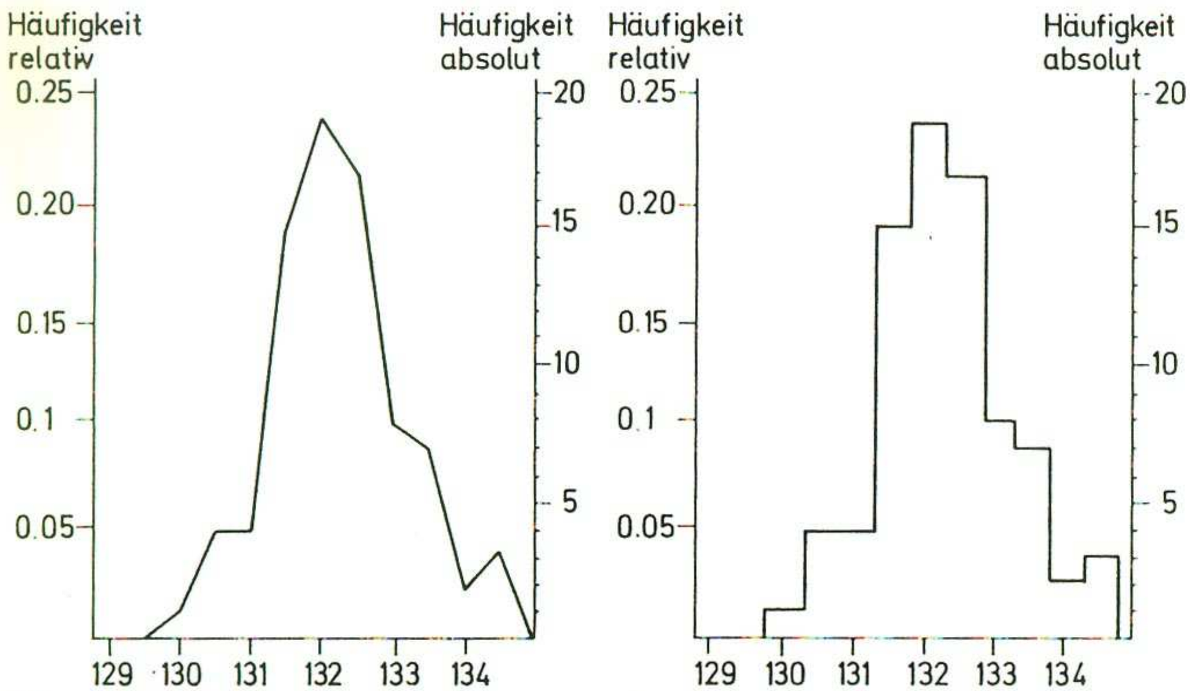
80 Messwerte s_i im Intervall
129.8 mm bis 134.6 mm

Abschätzung der Teilintervallbreite

$$\Delta s = \frac{134.6 - 129.8}{\sqrt{80}}\,\text{mm} \approx 0.5\,\text{mm}$$

Intervall Δs/mm	Häufigkeit
130.0 ± 0.25	I
130.5 ± 0.25	IIII
131.0 ± 0.25	IIII
131.5 ± 0.25	卌 卌 卌
132.0 ± 0.25	卌 卌 卌 IIII
132.5 ± 0.25	卌 卌 卌 II
133.0 ± 0.25	卌 III
133.5 ± 0.25	卌 II
134.0 ± 0.25	II
134.5 ± 0.25	III

a)



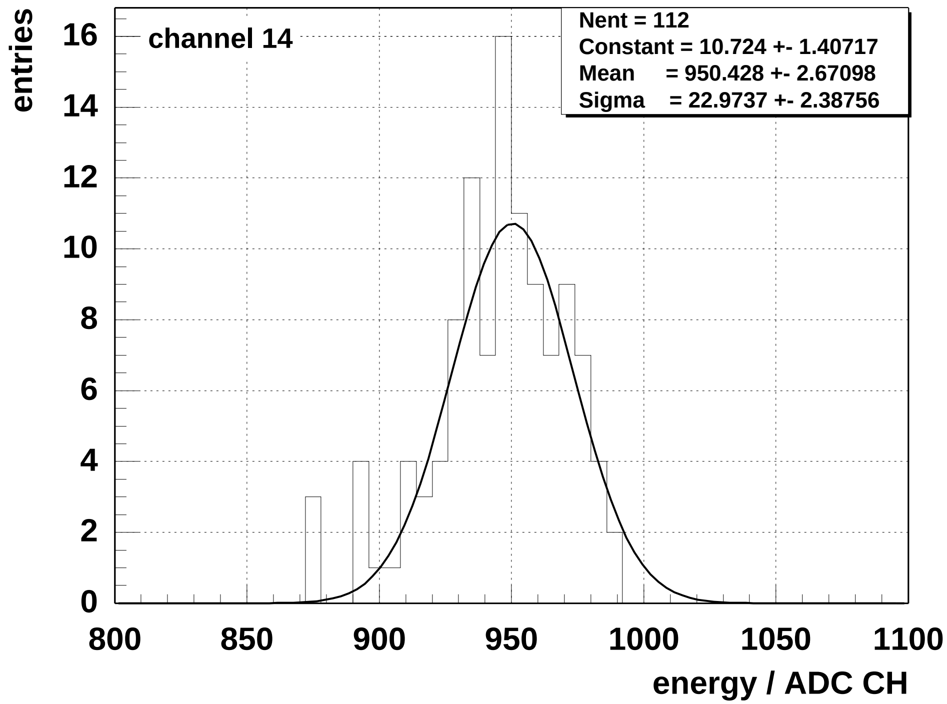
b) c)

Abb. 3. Graphische Darstellung der Häufigkeitsverteilung eines Kollektivs (Histogramm).

Häufigkeitsverteilung einer Energiemessung von 30 GeV Elektronen mit einem $PbWO_4$-Kristall:

Zuerst wählt man eine vernünftige Intervallbreite, dann Abzählung wie häufig Ereignisse in jedem Intervall auftreten.

Dann wird eine Gaußkurve angepasst, aus der man dann den Mittelwert $\bar{E}$ ("Mean") und den "Fehler" $\Delta\bar{E}$ ("Sigma") ablesen kann:



Dort, wo die Kurve auf $\sqrt{\frac{1}{e}}$ (=0,61) des Maximums abgefallen ist (Wendepunkte), hat sie die Breite $2 \cdot \sigma$.

Protokollführung und Auswertung:

Zur Auswertung wird folgendes Messprotokoll empfohlen
($[x]$: Maßeinheit von X):

1. Lfd. Nr. der Messung	2. Messgröße	3. Abweichung vom Mittelwert	4. Quadrat der Abweichung
i	$x_i/[x]$	$(x_i - \overline{x})/[x]$	$(x_i - \overline{x})^2/[x]^2$
1 $\vdots$ n	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\sum x_i = \ldots$		$\sum (x_i - \overline{x})^2 = \ldots$

Beispiel

Allgemeine Formel für den Fehler des Mittelwerts :

$$\Delta\overline{x} = \frac{s}{\sqrt{n}} = +\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

6 Messungen einer Länge l (n=6):

i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/cm$	$(l_i - \bar{l})^2/cm^2$
1	37,3	+0,2	0,04
2	35,5	-1,6	2,56
3	36,8	-0,3	0,09
4	38,1	+1,0	1,00
5	37,8	+0,7	0,49
6	37,2	+0,1	0,01

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+...+l_n}{n} = \frac{(37{,}3+35{,}5+36{,}8+38{,}1+37{,}8+37{,}2)cm}{6} = 37{,}1167\,\text{cm}$

Fehler des Mittelwerts: $\Delta\bar{l} = +\sqrt{\frac{1}{6\cdot 5}\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2} = +\sqrt{\frac{1}{6\cdot 5}\cdot 4,19}\ cm = 0{,}3737\,\text{cm}$

Ergebnis: $l = (37,1 \pm 0,4)\ cm$

Der wahre Wert liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall 36,7 bis 37,5 cm, mit 99% Wahrscheinlichkeit zwischen 35,9 und 38,3 cm.

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+...+l_n}{n} = \frac{(37{,}3+35{,}5+36{,}8+38{,}1+37{,}8+37{,}2)cm}{6} = 37{,}1167$ cm

Fehler des Mittelwerts: $\Delta\bar{l} = +\sqrt{\frac{1}{6\cdot 5}\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2} = +\sqrt{\frac{1}{6\cdot 5}\cdot 4,19}\ cm = 0{,}3737$ cm

Auf- bzw. Abrunden!

Ergebnis: $l = (37,1 \pm 0,4)\,cm = 37,1\,cm \pm 0,4\,cm$

Die $\pm 0,4\,cm$ sind ein absoluter Fehler (hat dieselbe Einheit wie der Mittelwert).

Der relative Fehler ist das Verhältnis des absoluten Fehlers zum Mittelwert (wird meistens in Prozent angegeben). Man kann also auch schreiben:

$$l = (37,1 \pm 0,4)\,cm = 37,1\,cm \pm \frac{0{,}4}{37{,}1}\cdot 100\,\% = 37,1\,cm \pm 1,1\,\%$$

Fehlerfortpflanzung

1) Die Länge eines Stabes wird durch zweifaches Ansetzen eines Maßstabs gemessen (weil der Maßstab nicht lang genug ist). Jede Messung macht einen Fehler. Wie groß ist der Gesamtfehler?

Antwort: Der Gesamtfehler ist die Summe der beiden absoluten Fehler.

2) Die Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$ wird durch Messung des zurückgelegten Weges s und der dafür benötigten Zeit t bestimmt. Beide Messungen beinhalten Fehler. Wie groß sind Mittelwert und Fehler von v?

In einem vereinfachten Verfahren bestimmen wir den maximalen Fehler ("Fehlerschätzung"):

$$s = \overline{s} \pm \Delta\overline{s} \qquad t = \overline{t} \pm \Delta\overline{t}$$

Mittelwert: $\overline{v} = \overline{s}\,/\,\overline{t}$

"kleinster" Wert von v: $\quad v_{min} = \frac{\overline{s}-\Delta\overline{s}}{\overline{t}+\Delta\overline{t}}$

"größter" Wert von v: $\quad v_{max} = \frac{\overline{s}+\Delta\overline{s}}{\overline{t}-\Delta\overline{t}}$

Etwa in der Mitte von $[v_{min}, v_{max}]$ liegt $\overline{v}$. Die größere der Differenzen $\overline{v} - v_{min}$ bzw. $v_{max} - \overline{v}$ ist der Fehler $\Delta\overline{v}$.

Beispiel

Die Länge l war $l = \bar{l} \pm \Delta\bar{l}$.

Die Seiten eines Rechtecks seien

$a = (120,0 \pm 0,2)cm \qquad b = (90,0 \pm 0,1)cm$

Wie groß sind Mittelwert und Fehler des Mittelwerts der Fläche $F = a \cdot b$?

Mittelwert $\overline{F} = \overline{a} \cdot \overline{b} = 120\,cm \cdot 90\,cm = 10800\,cm^2$

$$\begin{aligned} F_{max} &= (\overline{a} + \Delta\overline{a})(\overline{b} + \Delta\overline{b}) \\ &= \overline{a} \cdot \overline{b} + \Delta\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \Delta\overline{b} + \Delta\overline{a} \cdot \Delta\overline{b} \\ &\cong \overline{a} \cdot \overline{b} + \Delta\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \Delta\overline{b} \end{aligned}$$

$$F_{min} \cong \overline{a} \cdot \overline{b} - \Delta\overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{a} \cdot \Delta\overline{b}$$

$$\Delta\overline{F} \cong F_{max} - \overline{F} \cong \overline{F} - F_{min} \cong \Delta\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \Delta\overline{b} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta\overline{F}}{\overline{F}} \cong \frac{\Delta\overline{a}}{\overline{a}} + \frac{\Delta\overline{b}}{\overline{b}}$$

Dies ist eine allgemeine Regel:
Der relative Fehler von Produkten (hier $F = a \cdot b$) und Quotienten von Messwerten ist gleich der Summe der relativen Fehler der Faktoren!

Der relative Fehler von Produkten (hier $F = a \cdot b$) und Quotienten von Messwerten ist gleich der Summe der relativen Fehler der Faktoren!

$$\frac{\Delta\overline{F}}{\overline{F}} \cong \frac{\Delta\overline{a}}{\overline{a}} + \frac{\Delta\overline{b}}{\overline{b}}$$

Der relative Fehler von F in unserem Beispiel

$a = (120,0 \pm 0,2)cm \qquad b = (90,0 \pm 0,1)cm$

ist also:

$$\frac{\Delta\overline{F}}{\overline{F}} \cong \frac{0{,}2\,cm}{120\,cm} + \frac{0{,}1\,cm}{90\,cm} = 0{,}0028 = 0{,}28\%$$

Der absolute Fehler ist dann: $\Delta\overline{F} = \overline{F} \cdot 0,0028 = 30,2\,cm^2$

Es gibt also **2 Regeln**:

1) Werden zwei Größen $a = \overline{a} + \Delta\overline{a}$ und $b = \overline{b} + \Delta\overline{b}$ addiert oder subtrahiert, so addieren sich in beiden Fällen die absoluten Fehler zum Gesamtfehler:

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lcl} c = a + b & \text{bzw.} & c = a - b \\ \overline{c} = \overline{a} + \overline{b} & \text{bzw.} & \overline{c} = \overline{a} - \overline{b} \end{array}$$

$$\boxed{\Delta\overline{c} = \Delta\overline{a} + \Delta\overline{b}}$$

Beispiel:
Flüssigkeitsgewicht=Gewicht (Gefäß + Flüssigk.) − Gewicht (Gefäß):

$$\Delta G_F = \Delta G_{G+F} + \Delta G_G$$

2) Werden zwei Größen $a = \overline{a} + \Delta\overline{a}$ und $b = \overline{b} + \Delta\overline{b}$ multipliziert oder dividiert, so addieren sich die relativen Fehler in beiden Fällen zum Gesamtrelativfehler:

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lcl} c = a \cdot b & \text{bzw.} & c = a \,/\, b \\ \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{b} & \text{bzw.} & \overline{c} = \overline{a} \,/\, \overline{b} \end{array}$$

$$\boxed{\frac{\Delta\overline{c}}{\overline{c}} = \frac{\Delta\overline{a}}{\overline{a}} + \frac{\Delta\overline{b}}{\overline{b}}}$$

Vektoren

Eine physikalische Größe G ist das Produkt aus einer Zahl $\{G\}$ und einer Einheit $[G]$:

$$G = \{G\} \cdot [G]$$

Das reicht nicht immer: manchmal ist auch die Richtung wichtig, z.B. bei den

Vektoren:
Geschwindigkeit $\vec{v}$, Kraft $\vec{F}$, Impuls $\vec{p}$, elektrisches Feld $\vec{E}$, magnetisches Feld $\vec{B}$, ...

Die Skalare:
Masse m, Zeit t, Volumen V, Ladung q, Druck p, ...
sind dagegen unabhängig von einer Richtung.

Einiges über Vektoren:

- Sie sind gleich, wenn Richtung und Länge identisch sind, d.h. man darf sie (i.A.) beliebig parallel verschieben, ohne dass sie sich ändern.
- In der Physik muss man definieren, welche Länge einer Einheit entsprechen soll.
- Die Länge des Vektors (sein "Betrag") gibt dann die physikalische Größe (Zahl $\times$ Einheit) wieder.
- Es gibt verschiedene Schreibweisen für Vektoren:
  $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \mathbf{a}, \underline{a}, \ldots$. Wir verwenden $\vec{a}$.

- $|\vec{a}| = a$ sei der Betrag von $\vec{a}$

- **Vektoraddition:**Die große Bedeutung der (physikalischen) Vektoren liegt darin, dass sie den Gesetzen der Vektoraddition gehorchen. Mehrere Kräfte, die in verschiedene Richtungen an einem Körper ziehen, bewirken dasselbe wie eine einzelne Kraft, die man aus dem Vektoradditionsgesetz errechnet!

  Vektoradditionsgesetz: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ verschiebe man so, dass ihre Anfangspunkte zusammenfallen. Die Diagonale (vom gemeinsamen Anfangspunkt ausgehend) des aus diesen beiden Vektoren gebildeten Parallelogramms ist der Summenvektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (das + Zeichen bedeutet hier Vektoraddition; eigentlich müsste man ein neues Zeichen erfinden).

- Vektoraddition ist
  – kommutativ: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
  – assoziativ: Bei der Addition mehrerer Vektoren kommt es nicht darauf an, welche zwei zuerst addiert werden.

- **Subtraktion** zweier Vektoren: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$,
  wobei $-\vec{b}$ entgegengesetzte Richtung zu $\vec{b}$ und dieselbe Länge hat.

Man könnte Vektoren immer grafisch addieren! Rechnerisch ist das aber einfacher, deswegen: $\rightarrow$

Darstellung eines Vektors durch seine Komponenten im rechtwinkligen Koordinatensystem (Anfangspunkt des Vektors in den Koordinatenursprung geschoben):

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_x, a_y, a_z) \qquad \text{oder} \\ \vec{a} &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \end{aligned}$$

(Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$: Vektoren in x-, y- bzw. z-Richtung mit jeweils der Länge einer Einheit).

Vektorsumme aus
$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad und \;\; \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$:

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \qquad \text{oder} \\ &= (a_x + b_x)\vec{e}_x + (a_y + b_y)\vec{e}_y + (a_z + b_z)\vec{e}_z \end{aligned}$$

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot \vec{a} &= (3a_x, 3a_y, 3a_z) \qquad \text{oder} \\
&= 3a_x\vec{e}_x + 3a_y\vec{e}_y + 3a_z\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

Betrag (Länge) eines Vektors $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$:

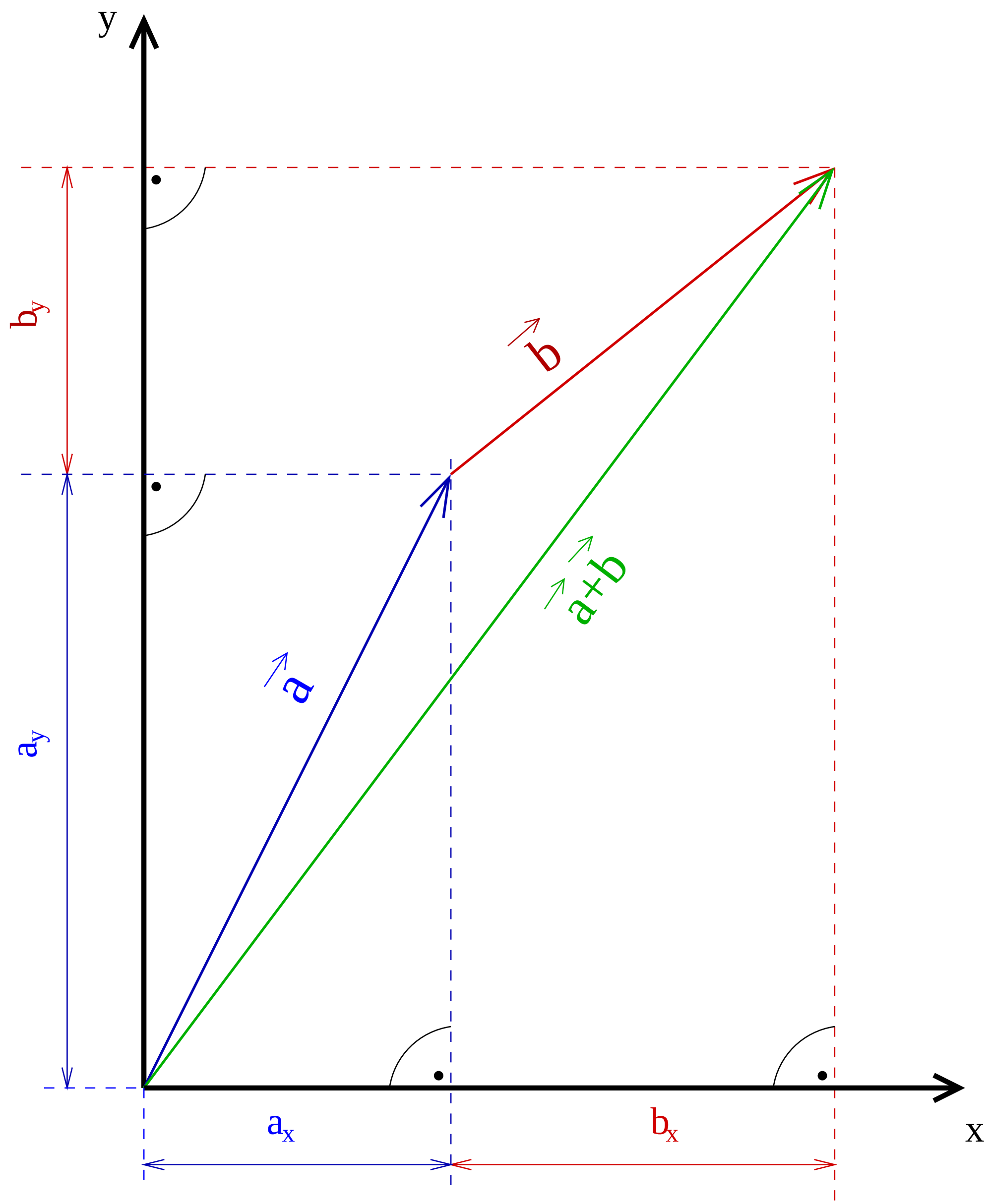
$$
\Rightarrow \qquad |\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}
$$

Ein Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$ ist dann:

$$
\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{a} = \left(\frac{a_x}{a}, \frac{a_y}{a}, \frac{a_z}{a}\right)
$$

Vektoraddition $\vec{a} + \vec{b}$

$\vec{a} = (a_x, a_y)$ $\qquad\qquad$ $\vec{b} = (b_x, b_y)$:



$\vec{b}$ wird so parallel verschoben (ist erlaubt), dass sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt von $\vec{a}$ zusammenfällt.

Der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ beginnt im Koordinatenursprung und endet mit der Spitze von $\vec{b}$. Seine Komponenten lassen sich direkt aus der Abbildung ablesen:

$$\vec{a} + \vec{b} \;=\; (a_x + b_x, a_y + b_y)$$

Differentiation

Beispiel:

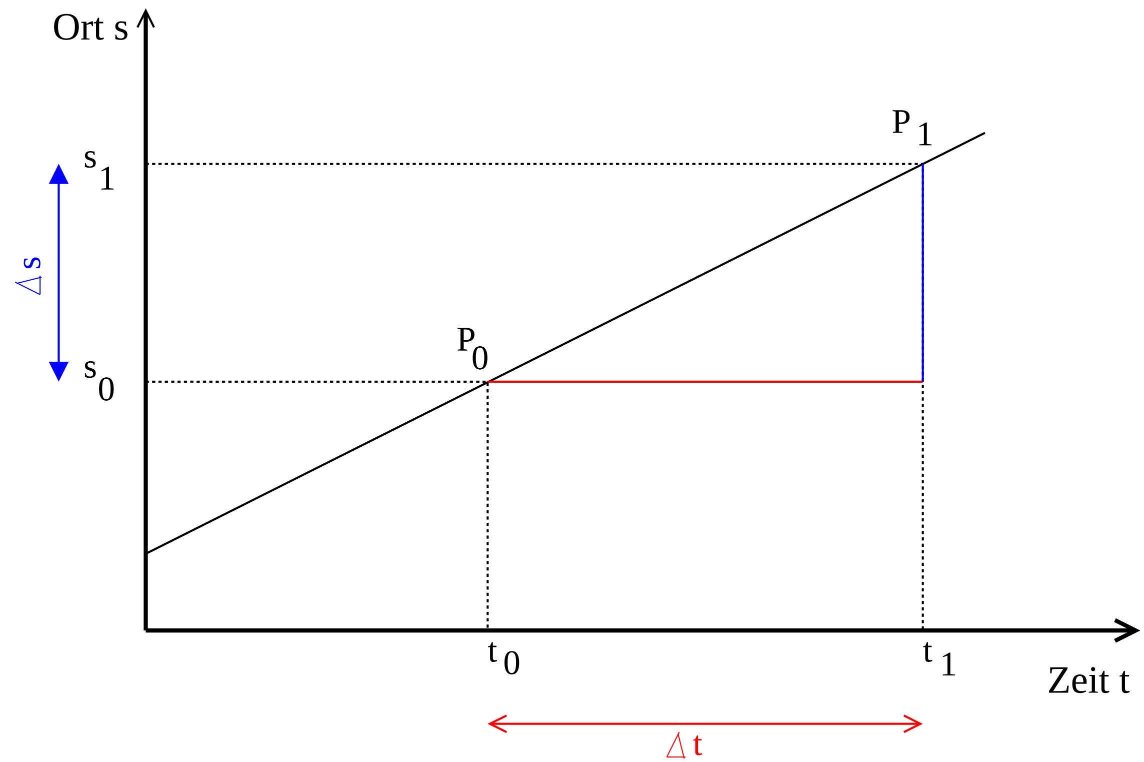
Ein Auto fährt mit konstanter Geschwindigkeit v über die Autobahn.

Dann ist das Verhältnis aus zurückgelegtem Weg Δs zur dafür benötigten Zeit Δt immer dasselbe (Start bzw. Stopp der Messung beliebig) und es gilt:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Die Geschwindigkeit bestimmen Sie, indem Sie Zeit und Ort zu einem Startpunkt P_0 und zu einem (späteren) Stopppunkt P_1 messen.

Weg-Zeit-Diagramm der Bewegung (**konstante Geschwindigkeit**):



P_0: Startpunkt der Messung
(t_0: Startzeit; s_0: Startort)

P_1: Stopppunkt der Messung
(t_1: Stoppzeit; s_1: Stopport)

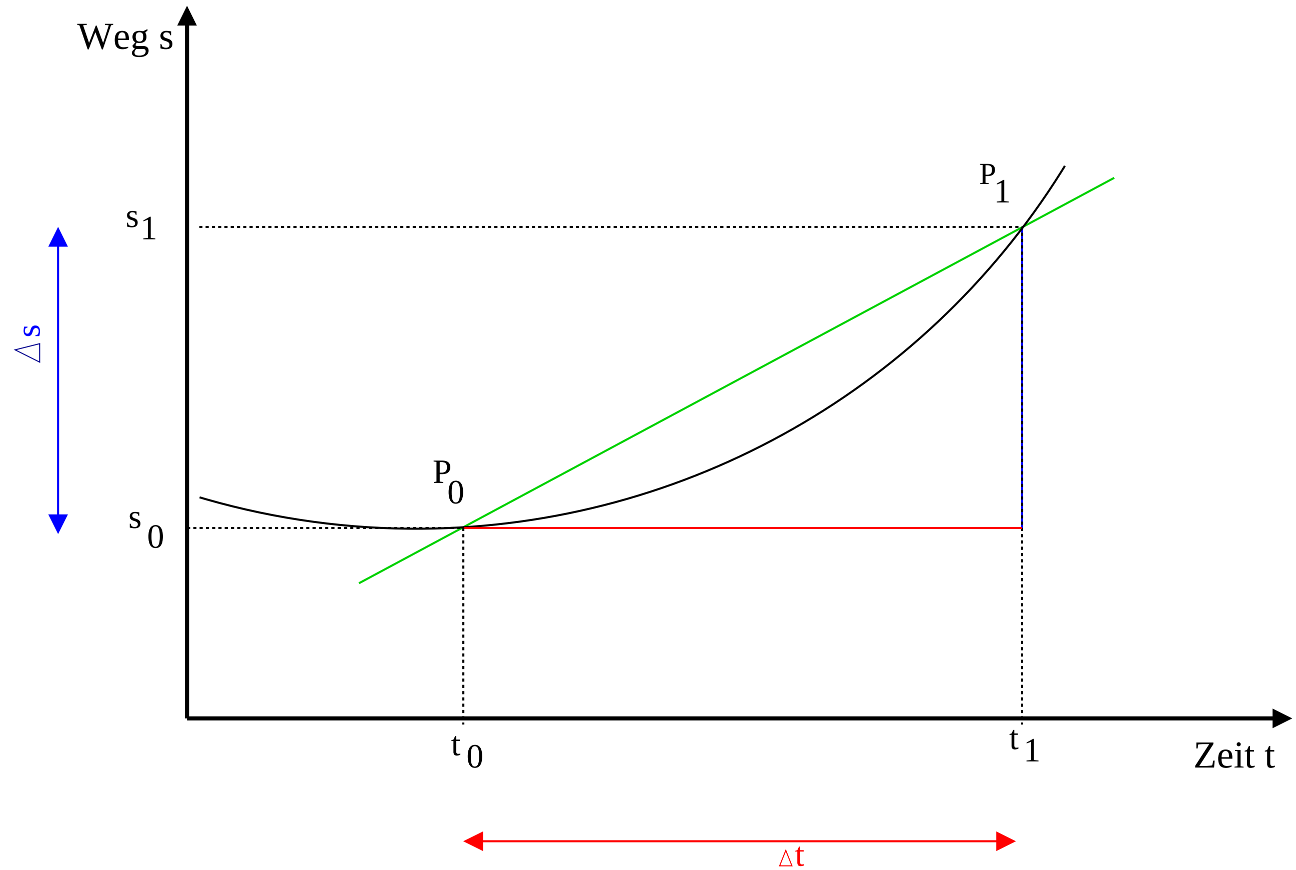
Die Geschwindigkeit v ist dann:

$$v = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Da v konstant sein soll (ändert sich nicht mit der Zeit), ist die "Bewegungskurve" im Weg/Zeit-Diagramm eine Gerade mit der "Steigung" $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$!

Wir nehmen jetzt an, dass sich die Geschwindigkeit des Autos (durch Bremsen, Beschleunigen) während der Zeit, in der Sie messen, ändert. Das bedeutet, die Kurve im Weg/Zeit-Diagramm kann **keine Gerade mehr** sein (Steigung der Kurve ändert sich).

Eine Messung von v (wie eben) ergibt jetzt eine Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, die der Steigung der grünen Geraden entspricht, d.h. eine über die Zeit von t_0 nach t_1 gemittelte Geschwindigkeit $\overline{v}$.



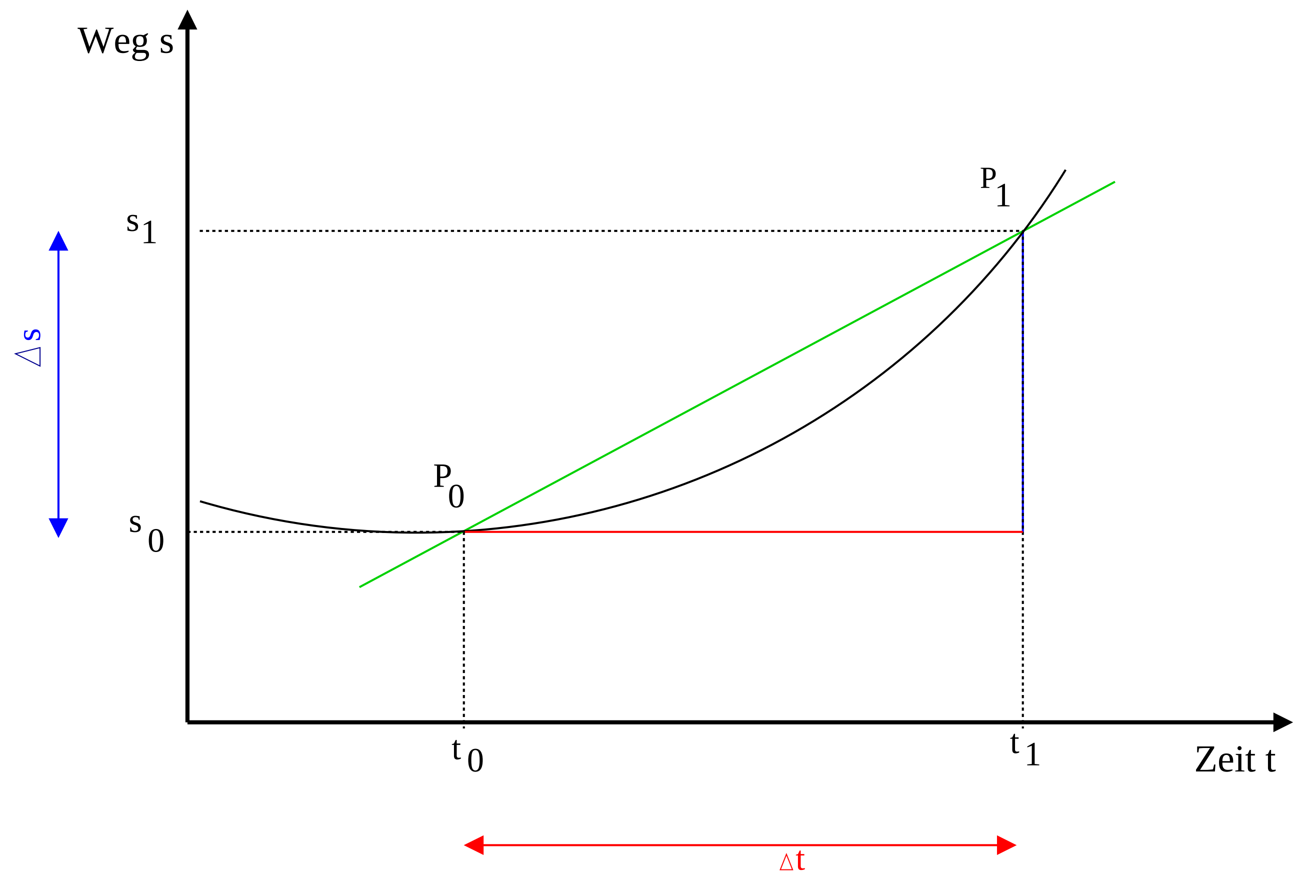
Kurz nach t_0 sind Sie langsamer, kurz vor t_1 schneller als $\overline{v}$. Sie könnten "geblitzt" werden, obwohl Ihre mittlere (gemessene) Geschwindigkeit evtl. unter der maximal erlaubten Geschwindigkeit liegt. Damit Ihre Messung "genauer" wird, müssen Sie das Messintervall Δt kleiner machen, d.h. Sie müssen t_1 näher an t_0 heranrücken. Sie müssen Δt so klein machen, dass die Geschwindigkeitsänderung während Δt vernachlässigbar klein wird.

In der Mathematik kann man Δt sogar "unendlich klein" machen. Man erhält dann den sog. Differentialquotienten

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0}$$

Anschaulich ist klar, dass in Abb. 2 die grüne Gerade bei dieser Prozedur in die Tangente an die Kurve im Punkte P_0 übergeht.

Die Steigung $\left.\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|_{\Delta t \to 0}$ ist also die Steigung der Tangente an die Kurve im Punkte P_0. Sie entspricht der Geschwindigkeit $v(t_0)$.



Wichtige Funktionen und ihre Ableitungen

c und g sind jeweils Konstanten.

Funktion	Ableitung
$y = c \cdot x^n$	$y' = n \cdot c \cdot x^{n-1}$
$y = c \cdot e^{\pm g \cdot x}$	$y' = \pm g \cdot c \cdot e^{\pm g \cdot x}$
$y = c \cdot \ln x$	$y' = \frac{c}{x}$
$y = c \cdot \sin(g \cdot x)$	$y' = c \cdot g \cdot \cos(g \cdot x)$
$y = c \cdot \cos(g \cdot x)$	$y' = -c \cdot g \cdot \sin(g \cdot x)$
$y = c$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = x^2$	$y' = 2x$
$y = ax^n + b$	$y' = nax^{n-1}$
$y = \sin ax$	$y' = a \cos ax$
$y = \sin^2 ax$	$y' = 2a \sin ax \cos ax$
$y = \cos ax$	$y' = -a \sin ax$
$y = e^{ax}$	$y' = ae^{ax}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_{10} x$	$y' = \frac{0,4343}{x}$

Differentiationsregeln

1) Konstanter Faktor:

$y = f(x) = c \cdot u(x) \qquad y'(x) = c \cdot u'(x)$

2) Summenregel:

$y(x) = u(x) + v(x) \qquad y'(x) = u'(x) + v'(x)$

3) Produktregel:

$y(x) = u(x) \cdot v(x) \qquad y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

4) Quotientenregel:

$$y(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad y'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

5) Kettenregel:

$$y(x) = f(u(x)) \qquad y'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Aufgaben

a) Grundbegriffe des Messens und der quantitativen Beschreibung

1. Dividiert man eine physikalische Größe durch ihre Einheit, so erhält man
   (A) eine neue physikalische Größe
   (B) die physikalische Größe selbst
   (C) eine reine Zahl
   (D) die Einheit der physikalischen Größe
   (E) eine Basisgröße

2. Welche der folgenden Zuordnungen von Vorsilbe und Zehnerpotenz sind richtig?
   (1) nano - 10^{-12}
   (2) mikro - 10^{-9}
   (3) milli - 10^{3}
   (4) centi - 10^{2}

   (A) Keine der Zuordnungen 1-4 sind richtig
   (B) nur 1 und 2 sind richtig
   (C) nur 2 und 4 sind richtig
   (D) nur 1, 3 und 4 sind richtig
   (E) 1-4 = alle sind richtig

3. Welche der folgenden Längenangaben ist **nicht** äquivalent zu 7 μm?

   (A) 7000 nm
   (B) 0,007 mm
   (C) $7 \cdot 10^{-6}$ m
   (D) $7 \cdot 10^{-3}$ cm
   (E) $7 \cdot 10^{3}$ nm

4. Die Geschwindigkeit 50 km/h ist etwa gleich
   (A) 1,4 m/s
   (B) 14 m/s
   (C) 18 m/s
   (D) 140 m/s
   (E) 200 m/s

5. Das Volumen einer Flüssigkeit sei als $V = x$ cm^3 gegeben. Mit welchem Faktor muss x multipliziert werden, wenn dasselbe Volumen in m^3 angegeben werden soll?

   (A) mit 10^{-9}
   (B) mit 10^{-6}
   (C) mit 10^{-3}
   (D) mit 10^{3}
   (E) mit 10^{6}

b) Fehlerrechnung

1. Welche der folgenden Aussagen ist (sind) richtig?

   (1) Wenn der absolute Fehler einer Messung mit einer Einheit angegeben ist, weist der relative Fehler die gleiche Einheit auf.

   (2) Erfassbare systematische Fehler können korrigiert werden und haben dann auf die Angabe der Messunsicherheit keinen Einfluss mehr.

   (3) Systematische Fehler können durch Vergrößerung der Anzahl der Messungen unter gleichen Bedingungen verkleinert werden.

   (4) Wenn die Einzelmessungen einer Größe unter gleichen Bedingungen wiederholt wird und ein anderes Resultat ergibt, liegt ein systematischer Fehler vor.

   (A) nur 1 ist richtig
   (B) nur 2 ist richtig
   (C) nur 1 und 3 sind richtig
   (D) nur 1, 2 und 3 sind richtig
   (E) 1-4 = alle sind richtig

2. Für die beiden Messreihen I und II gilt:

I	II
L / m	L / m
10	8
10	10
12	8
10	12
8	12
10	10

(1) Sie haben den gleichen Mittelwert (MW)
(2) sie haben verschiedene Mittelwerte
(3) sie haben gleiche Standardabweichung (Fehler des MW)
(4) die Standardabweichung von I ist größer als die von II
(5) die Standardabweichung von II ist größer als die von I

(A) nur 1 und 3 sind richtig
(B) nur 1 und 4 sind richtig
(C) nur 1 und 5 sind richtig
(D) nur 2 und 4 sind richtig
(E) nur 2 und 5 sind richtig

3. Was versteht man unter Zuverlässigkeit einer Messung?

4. Welche Fehlerarten unterscheidet man?

5. Wie geht ein erfassbarer systematischer Fehler in die Messunsicherheit ein?

6. Um welche Fehlerart handelt es sich, wenn eine Schwester immer vergisst, ein 40°C anzeigendes Quecksilberfieberthermometer zurückzuschütteln und damit Fieber angibt?

7. Kann man den Betrag eines systematischen Fehlers durch Vergrößerung der Zahl der Messungen verkleinern?

8. Nennen Sie mindestens zwei Gründe für das Auftreten von zufälligen Fehlern.

9. Jemand, der sehr langsam reagiert, misst mit einer Handstoppuhr einen 100-m-Lauf. Ist die Zeit durch einen systematischen Fehler verfälscht?

10. Welchen Fehler in Prozent begeht man, wenn man für die Kreiszahl $\pi = 3{,}141592$ den Wert $\pi = 3$ annimmt?

11. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt ca. 300 000 km/s. Sie ist heute auf mindestens 1 m/s Genauigkeit bekannt. Wie groß ist der relative Fehler?

12. Eine Person “wiege” (genauer:habe die Masse) vor einer Diät 85 kg, danach 80 kg. Die Waage habe eine Messunsicherheit von 2 kg. Wie groß ist die Unsicherheit (absolut und prozentual) bei der Bestimmung der Gewichtsabnahme? (Vereinfachtes Verfahren der Fehlerfortpflanzung).

13. Die Seitenlängen eines Rechtecks betragen $a = 3$ cm und $b = 7$ cm und seien mit einer Unsicherheit von $\Delta a = \Delta b = \pm 0,1$ cm bestimmt worden. Wie groß ist die Unsicherheit in der Bestimmung der Fläche?

14. Der Wert eines unbekannten Widerstandes wird durch Messung zu $(200 \pm 3)\,\Omega$ bestimmt. Wie groß ist der relative Fehler?

15. Die Messung einer Länge von $\ell = 40$ cm wird mit einer Messunsicherheit von $\Delta\ell = 1$ mm durchgeführt. Wie groß ergibt sich die relative Messunsicherheit?

16. Eine Quarzstoppuhr gehe in einem Monat 24 s nach. Wie groß ist etwa der relative Fehler?

17. Wie groß ist die relative Messunsicherheit (in Prozent) einer Spannungsmessung, für die sich ein Wert von $U = 2$ kV $\pm$ 20 mV ergibt?

18. Der Mittelwert des Durchmessers von 100 Erythrozyten sei $x_1 = 8,0\mu$m. Nachträglich stellt sich heraus, dass sich unter den Messwerten ein sehr großer Wert (sog. Ausreißer) mit einem Durchmesser von 30 μm befindet. Wie groß ergibt sich der Mittelwert x_2 der 99 Erythrozyten ohne den Ausreißer?

19. Unter einem Messmikroskop werden rote Blutkörperchen als kreisförmige Scheibchen gesehen. Als Ergebnis einer Messreihe folgt für ihren Durchmesser im Mittel $d = 8\mu$m mit einer Messunsicherheit von $\Delta d = \pm\, 0,1\mu$m. Wie groß ist die relative Messunsicherheit bei Angabe der Querschnittsfläche A?

20. Die Kantenlänge a eines Würfels wird zu $a = (1,00 \pm\; 0,001)$ m gemessen. Auf welchen Wert ist demnach sein Volumen ungefähr bekannt?

21. Die elektrische Leistungsaufnahme eines Heizgerätes soll bestimmt werden. Die Messwerte betragen: $U = 200$ V $\pm$ 3%, $I = 10$ A $\pm$ 2%. Wie groß ist die maximale absolute Unsicherheit (Fehler) der so bestimmten Leistung? (Elektrische Leistung $P = I \cdot U$).

22. Für das Trägheitsmoment J einer Kugel der Masse m und Radius r, die sich um ihre eigene Achse dreht, gilt die Formel: $J = \frac{2}{5}\, m \cdot r^2$. Sowohl m als auch r seien auf jeweils $\pm\, \frac{1}{2}$ % genau bestimmt worden. Wie groß ist die maximale relative Unsicherheit des nach obiger Formel berechneten Trägheitsmomentes?

23. Aus einer Massenbestimmung (relative Unsicherheit $\pm 4\%$) und einer Volumenbestimmung (relative Unsicherheit $\pm 3\%$) wird die Dichte einer Probe bestimmt. Wie groß ist der maximale Wert für deren relative Unsicherheit?

24. In einem Experiment werde die Fallbeschleunigung g aus der Messung der Zeit t, die ein Körper im Vakuum benötigt, um eine bestimmte Strecke s zu durchfallen, bestimmt. Wie groß ist etwa die maximale relative Unsicherheit des so bestimmten Wertes von g, wenn die relativen Unsicherheiten bei der Zeitmessung $\pm$ 2% und bei der Wegmessung $\pm$ 1% betragen ($s = \frac{1}{2}\,gt^2$)?

25. Die Geschwindigkeit eines Körpers, der sich gleichförmig geradlinig bewegt, werde fünfmal gemessen:

$$v = (1,30; 1,27; 1,32; 1,25; 1,26)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Man berechne den Mittelwert $\overline{v}$ sowie die Standardabweichung s und den Fehler $\Delta\overline{v}$ des Mittelwertes.

26. Die Kantenlänge eines Würfels wird gemessen zu $a = (0,519 \pm 0,001)$ m. Wie groß ist das Volumen sowie sein absoluter und relativer Fehler?

27. Bestimmen Sie die Dichte ϱ und ihren Fehler $\Delta\varrho$ einer Eisenkugel mit der Masse $M = (1000,0 \pm 0,1)$ g und dem Durchmesser $D = (6,20 \pm 0,01)$ cm.

c) Vektorrechnung

1. Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ drei Vektoren und a, b, c ihre Beträge. Wie müssen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beschaffen sein, damit gilt

   a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ und $a+b=c$

   b) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$ und $a+b=c$

   c) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$

   d) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}|$

   e) $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2}$?

2. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (0,\ 1,\ 2)$ und $\vec{b} = (1,\ 1,\ 1/2)$. Man berechne den Betrag der Vektorsumme und der Vektordifferenz.

3. Gegeben seien fünf Kräfte

$\vec{F_1} = (5, -2, 0)\ N$

$\vec{F_2} = (1, 3, 5)\ N$

$\vec{F_3} = (-3, -2, -2)\ N$

$\vec{F_4} = (4, 2, -3)\ N$

$\vec{F_5} = (-1, 4, 5)\ N$

.

Durch welche Gesamtkraft können diese Kräfte ersetzt werden?

d) Differentiation

1. Bilden Sie die Ableitungen:

a) $y = 2 \cdot x^3$

c) $y = \dfrac{1}{x^2}$

e) $y = (x^2 + 2)^3$

g) $y = \sqrt{1 + x^2}$

h) $y = 3 \cdot \cos(6x)$

j) $y = A \cdot e^{-x} \cdot \sin(2\pi x)$

l) $y = \sin x \cdot \cos x$

n) $y = (3x^2 + 2)^2$

p) $y = e^{2x^3 - 4}$

2. Bilden Sie die Ableitungen:

b) $y = \sqrt[3]{x}$

d) $y = \dfrac{2x}{4+x}$

f) $y = x^4 + \dfrac{1}{x}$

i) $y = 4 \cdot \sin(2\pi x)$

k) $y = \ln(x+1)$

m) $y = \sin x^2$

o) $y = a \cdot \sin(bx + c)$

3. Das Weg-Zeit-Gesetz einer Bewegung sei

$$s(t) = a \cdot t^2 - b \cdot t$$

mit $a = 3\,\frac{m}{s^2}$ und $b = 8\,\frac{m}{s}$.
Wie groß ist die Momentangeschwindigkeit zur Zeit $t = 3s$?